نظریهٔ صف

محمد مدرس یزدی

Queuing Theory

Mohammad Modarres Yazdi

صنایع
۱

مرکز نشردانشگاهی
۵۸۳

نظریهٔ صف
تألیف دکتر محمد مدرس یزدی
ویراستهٔ علیرضا جباری
مرکز نشردانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۷۰
تعداد ۳۰۰۰
حروفچینی: مهدی
لیتوگرافی: بهزاد
چاپ و صحافی: معراج
۱۸۰۰ ریال

مدرس یزدی، محمد
نظریهٔ صف
ص ع به انگلیسی: Mohammad Modarres Yazdi. Queuing theory
واژه‌نامه ص
کتابنامه ص
۱. صف‌بندی، نظریه. الف. مرکز نشردانشگاهی. ب. عنوان
۵۱۹/۸۲ ۱۵۷/۹

فهرست

۲

عنوان — صفحه

عنوان — صفحه

عنوان	صفحه

بسم‌الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

نظریهٔ صف یکی از مهمترین زمینه‌های کاربرد نظریهٔ احتمالات و فرایندهای تصادفی است. با توجه به نقش و اهمیت اقتصادی و اجتماعی صف در زمینه‌های مهندسی، مخابرات، سیستمهای حمل و نقل، کامپیوتر، خدمات، تولید، و سیستمهای اجتماعی، بسیاری از مهندسان و ریاضیدانان از سالها قبل به تحقیق در این زمینه پرداخته‌اند. در این تحقیقات، همگام با بسط روشهای تحلیلی به ارائهٔ کاربردهای جدید نیز توجه زیادی شده است.

با توجه به توسعهٔ گستردهٔ نظریهٔ صف، اکنون سالهاست که تدریس آن منحصر به رشته‌های ریاضی و آمار نیست، بلکه به آموزش آن در رشته‌های مهندسی صنایع، مخابرات، کامپیوتر، مدیریت، اقتصاد، آمار و ریاضی، و نظایر اینها اهمیت زیادی داده می‌شود. کتاب حاضر، در درجهٔ اول برای استفادهٔ دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد رشته‌های فوق تألیف شده است، اما درعین حال می‌تواند مورد استفادهٔ مهندسان و سایر کسانی قرار گیرد که به نوعی با طراحی و تحلیل سیستمهای اقتصادی، اجتماعی، و مهندسی سروکار دارند. بدین لحاظ، در نگارش کتاب سعی شده است که مفاهیم اصلی و کاربردی تحت‌الشعاع اثباتهای پیچیدهٔ ریاضی واقع نشود؛ با وجود این از بیان مبانی ریاضی و آماری مربوطه نیز صرف‌نظر نشده است، زیرا اساساً نظریهٔ صف بر پایهٔ اصول ریاضی بنا نهاده شده است.

در فصل اول کتاب، به ارائهٔ تعریف سیستمهای صف و برخی تعاریف مقدماتی لازم برای درک نظریهٔ صف پرداخته‌ایم.

فصل دوم کتاب، به اختصار به مرور احتمالات می‌پردازد و به خصوص به اهمیت کاربرد احتمال شرطی و امید ریاضی شرطی در محاسبهٔ عبارتهای احتمالی تأکید می‌شود. در فصلهای سوم و چهارم، فرایندهای احتمالی، به خصوص، نقش توزیع نمایی و فرایند پواسون و فرایند مارکوف مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بسیاری از کتابهای نظریهٔ صف، تنها اشاره‌ای به این مباحث می‌شود و بررسی بیشتر را به کتابهای مربوط به فرایندهای تصادفی واگذار می‌کنند. لیکن، چون در دانشگاههای ما درس فرایندهای تصادفی پیش‌نیاز نظریهٔ صف

نیست، در این کتاب، به تشریح این مباحث توجه بیشتری می‌شود. بدین‌ترتیب، در فصلهای اول تا چهارم، مقدمات لازم برای درک مفاهیم نظریهٔ صف فراهم می‌شود. در فصل پنجم، به کلیات سیستمهای صف و تشریح رابطه‌های مربوط به این سیستمها، صرف‌نظر از ویژگیهای آن می‌پردازیم. در سه فصل ششم و هفتم و هشتم، حالتهای خاص سیستمهای صف بررسی می‌شوند. در فصل نهم نیز نحوهٔ بهینه‌سازی و بررسی عوامل قابل‌تغییر (یا متغیرهای تصمیم) در سیستمهای صف مورد بحث قرار می‌گیرند.

در همهٔ فصول کتاب، مثالهای حل‌شدهٔ متعددی ارائه می‌شود. این مثالها کاربردهای نظریهٔ صف را نیز نشان می‌دهند. در پایان هر فصل نیز تعداد نسبتاً زیادی مسائل حل‌نشده برای تمرین و همچنین آشنایی با زمینه‌های کاربرد مدلها ارائه می‌شود.

در اینجا لازم است از همهٔ دانشجویانی که در تصحیح جزوات، و ارائهٔ پیشنهادهای مفید مؤلف را مساعدت و راهنمایی کرده‌اند تشکر کنم. از همکاری دست‌اندرکاران مرکز نشر دانشگاهی، به‌خصوص کارکنان حوزهٔ فنی‌مهندسی سپاسگزارم.

محمد مدرس

۱

سیستمهای صف

انتظار در صف هر چند بسی ناخوشایند است، اما متأسفانه بخشی از واقعیت اجتناب‌ناپذیر زندگی را تشکیل می‌دهد. انسانها، در زندگی روزمرهٔ خود با انواع مختلف صف، که به از بین رفتن وقت، نیرو و سرمایهٔ آنها می‌انجامد، روبه‌رو می‌شوند. اوقاتی که در صفهای اتوبوس، باجه‌های اداری، خرید و نظایر آنها به‌هدر می‌رود، نمونه‌های ملموسی از این نوع اتلافها در زندگی است. در جوامع امروزی، صفهای مهمتری وجود دارد، که هزینه‌های اقتصادی، و اجتماعی آنها به‌مراتب بیش از نمونه‌های سادهٔ فوق است. از آن‌جمله می‌توان صفهای حاصل از ترافیك شهری، و نیز صفهایی را که در فرودگاهها، بنادر، مؤسسات مخابراتی و در پشت فرایندهای تولید تشکیل می‌شود، نام برد. در مجموع، شاید بتوان گفت که انتظار در صف دیگر استثنا نیست و به‌صورت قاعده درآمده است.

از بین بردن نتایج نامساعد انتظار در صف بدون شناخت خصائص این پدیده امکانپذیر نیست. **نظریهٔ صف**، که به مطالعهٔ صفها از دیدگاه ریاضی می‌پردازد، تأثیر عوامل تشکیل‌دهندهٔ صف و راههای منطقی کاهش زمان انتظار را بررسی می‌کند. اگرچه هیچ‌گاه نمی‌توان صف را کلاً از میان برد، اما می‌توان که ضایعات ناشی از آن را حتی‌الامکان کاهش داد.

نیست، در این کتاب، به تشریح این مباحث توجه بیشتری می‌شود. بدین‌ترتیب، در فصلهای اول تا چهارم، مقدمات لازم برای درک مفاهیم نظریهٔ صف فراهم می‌شود. در فصل پنجم، به کلیات سیستمهای صف و تشریح رابطه‌های مربوط به این سیستمها، صرف‌نظر از ویژگیهای آن می‌پردازیم. در سه فصل ششم و هفتم و هشتم، حالتهای خاص سیستمهای صف بررسی می‌شوند. در فصل نهم نیز نحوهٔ بهینه‌سازی و بررسی عوامل قابل‌تغییر (یا متغیرهای تصمیم) در سیستمهای صف مورد بحث قرار می‌گیرند.

در همهٔ فصول کتاب، مثالهای حل‌شدهٔ متعددی ارائه می‌شود. این مثالها کاربردهای نظریهٔ صف را نیز نشان می‌دهند. در پایان هر فصل نیز تعداد نسبتاً زیادی مسائل حل‌نشده برای تمرین و همچنین آشنایی با زمینه‌های کاربرد مدلها ارائه می‌شود.

در اینجا لازم است از همهٔ دانشجویانی که در تصحیح جزوات، و ارائهٔ پیشنهادهای مفید مؤلف را مساعدت و راهنمایی کرده‌اند تشکر کنم. از همکاری دست‌اندرکاران مرکز نشر دانشگاهی، به‌خصوص کارکنان حوزهٔ فنی‌مهندسی سپاسگزارم.

محمد مدرس

۱

سیستمهای صف

انتظار در صف هرچند بسی ناخوشایند است، اما متأسفانه بخشی از واقعیت اجتناب‌ناپذیر زندگی را تشکیل می‌دهد. انسانها، در زندگی روزمرهٔ خود با انواع مختلف صف، که به از بین رفتن وقت، نیرو و سرمایهٔ آنها می‌انجامد، روبه‌رو می‌شوند. اوقاتی که در صفهای اتوبوس، ناهارخوری، خرید و نظایر آنها به‌هدر می‌رود، نمونه‌ای ملموسی از این نوع اتلافها در زندگی است. در جوامع امروزی، صفهای مهمتری وجود دارد، که هزینه‌های اقتصادی، و اجتماعی آنها به‌مراتب بیش از نمونه‌های سادهٔ فوق است. از آن‌جمله می‌توان صفهای حاصل از ترافیک شهری، و نیز صفهایی را که در فرودگاهها، بنادر، مؤسسات مخابراتی و در پشت فرایندهای تولید تشکیل می‌شود، نام برد. در مجموع، شاید بتوان گفت که انتظار در صف دیگر استثنا نیست و به‌صورت قاعده درآمده است.

از بین بردن نتایج نامساعد انتظار در صف بدون شناخت خصائص این پدیده امکانپذیر نیست. **نظریهٔ صف**، که به مطالعهٔ صفها از دیدگاه ریاضی می‌پردازد، تأثیر عوامل تشکیل‌دهندهٔ صف و راههای منطقی کاهش زمان انتظار را بررسی می‌کند. اگرچه هیچ‌گاه نمی‌توان صف را کلاً از میان برد، اما می‌توان که ضایعات ناشی از آن را حتی‌الامکان کاهش داد.

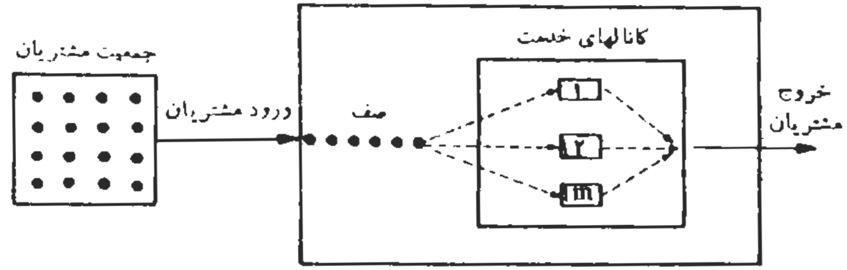
۱.۱ اجزای سیستم صف

صف چیست؟ سیستمی را درنظر بگیرید کـه خدمتی را ارائه می‌کند. متقاضیانـی برای دریافت این خدمت مراجعه می‌کنند، که آنها را اصطلاحاً **مشتری** می‌نامند. خدمت‌موردنظر توسط شخص، ماشین و یا امکانات دیگر، که **خدمت‌دهنده** نامیده می‌شوند، ارائه می‌شود. هنگامی که یك مشتری جهت دریـافت خدمت موردنظر به سیستم مراجعه می‌کند، دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد. اگـر حداقل یکی از خدمت‌دهندگان بیکار باشد، بلافاصله ارائهٔ خـدمت به مشتری جدیـد شروع می‌شود. اما چنانچه تمـام خدمت‌دهندگان مشغول به کار باشند، مشتری باید منتظر بماند؛ و بدین‌ترتیب، **صف** تشکیل می‌شود. بنابراین، در هر سیستمی کـه خدمتی را عرضه می‌کند، چنانچه در یـك لحظه تعداد مشتری بیش از ظرفیت سیستم (یعنی تعداد خدمت‌دهندگان) باشد، بی‌شك صف تشکیل خواهد شد. یادآوری می‌کنیم که مشتری و خدمت دهنده لزومـاً انـسان نیستند و صف مورد بحث نیز لزومـاً معنای فیزیکی نخواهد داشت. مثلا سیستم تعمیرات یك کارخانه را در نظر بگیرید. ماشینی که خراب شده است و منتظر تعمیرکار است، مشتری محسوب می‌شود. در ایـن مدت، این ماشین در محل استقرار خود جا می‌گیرد، نه در یك صف فیزیکی؛ امـا چون منتظر دریافت خدمت است، نوعی از صف، بمعنای مورد بحث در این مبحث، محسوب می‌شود.

مشتریهای بالقوهٔ سیستم، یا به‌عبارت دیگر مجموعهٔ مشتریهایی که امکان دارد برای دریافت خدمت ارائه شده مراجعه‌کنند، را **جمعیت مشتریان بالقوه** می‌نامند.

با توجه به مطالب فوق یك سیستم صف را، به طور کلی، مطابق شکل ۱.۱ می‌توان نشان داد.

مطابق شکل فوق، مشتری، که عنصری از جمعیت مشتریان بالقوه است، وارد سیستم می‌شود. اگر خدمت دهندگان بیکار نباشند، این مشتری در صف منتظر می‌ماند، تا نوبت به او برسد. پس از دریافت خدمت مورد نظر، از سیستم خارج می‌شود. اگر حداقل یکی از خدمت دهندگان بیکار باشد، مشتری بدون انتظار در صف، خدمت مورد نظر را دریافت و سیستم را ترك می‌کند.



شکل ۱.۱ اجزای یك سیستم صف.

۲.۱ معیارهای ارزیابی یك سیستم صف

برای سنجش عملکرد یـك سیستم صف، عمدتاً از سه معیار زیر بهره می‌گیرند؛ اگـرچه، برحسب مورد می‌توان از معیارهای دیگر نیز استفاده کرد.

۱. **طول صف** (تعداد مشتریهایی کـه در صف منتظر دریافت خدمت هستند) یا تعداد مشتریان داخل سیستم.

۲. **زمان انتظار** هرمشتری درصف یا سیستم. لازم به‌یادآوری است که مدت انتظار در سیستم، مجموع زمـان انتظار در **صف** به اضافهٔ مدت زمانی است که مشتری در حـال دریافت خدمت است.

۳. **درصدی از زمان** کـه سیستم به علت نبودن مشتری بیکار است (یا درصدی از زمان که سیستم مشغول به‌کار است).

باید درنظر داشت که، در اکثر سیستمها، معیارهای فوق ماهیت تصادفی دارند. در نتیجه، معیار ارزیابی سیستم، امید ریاضی این متغیرهای تصادفی خواهد بود.

۳.۱ ورودیهای سیستم

عملکرد سیستم به عوامل متعدد (یـا **ورودیهای سیستم**) بستگی دارد، که عمده‌ترین آنهـا عبارت‌اند از:

الف. الگوی ورود مشتری

بازدهی سیستم و معیارهای ارزیابـی آن، یعنی طول صف، مدت انتظار و درصد بیکاری سیستم، بستگی به تعداد مشتریهایی دارد کـه مراجعه می‌کنند. طبیعتا هرچه تعداد مراجعین بیشتر باشد، طول صف ومدت‌زمان انتظار مشتری زیادتر و درصدبیکاری سیستم کمتر است. فرض کنید که اولین مشتری در زمان s_1، دومی در زمان s_2 و به همین ترتیب nامین مشتری در زمان s_n وارد سیستم شوند. **زمان بین دو ورود متوالی** مشتریها را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد:

$$t_1 = S_1$$
$$t_2 = S_2 - S_1$$
$$t_n = S_n - S_{n-1}$$

برای مشخص کردن **الگـوی** ورود مشتری، مشخص کردن $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ضروری است. با توجه به اینکه زمان ورود مشتریها ماهیت تصادفی دارد، بدیهی است که زمانهای بین دو ورود متوالی نیز متغیرهای تصادفی هستند. برای بررسی دقیق رابطه‌های ریاضی حاکم بر سیستم صف و محاسبهٔ معیارهای ارزیابی آن، شناخت تابع توزیع این متغیرهای

شکل ۲۰۱ زمان ورود و فاصلهٔ زمانی بین دو ورود متوالی مشتریها

تصادفی ضرورت دارد. اگر تابع توزیع این متغیر تصادفی را با $A(x)$ نشان دهیم، خواهیم داشت

$$A(x) = P(t \leqslant x) \qquad (۱۰۱)$$

یك کمیت مفید برای بررسی الگوی ورود مشتری، **آهنگ ورود مشتری** است، که طبق تعریف میانگین تعداد مشتریانی است که در واحد زمان وارد سیستم می‌شوند. آهنگ ورود مشتری را معمولاً با λ نشان می‌دهند. بدیهی است که λ برابر با عکس میانگین زمان بین دو ورود متوالی است. مثلاً، ساده‌ترین حالت را در نظر بگیرید، که در آن زمان بین دو ورود متوالی مشتریها ثابت و برابر با نیم‌ساعت باشد. دراین‌صورت، تعداد مشتریهایی که درساعت وارد سیستم می‌شوند، برابر با ۲ است.

ورود مشتریها یا به‌صورت انفرادی، یا به‌صورت **گروهی** است. در مورد ورودهای گروهی، مثلاً، ورود مشتریانی که همزمان به وسیلهٔ اتوبوس وارد یك مهمانخانهٔ بین راه می‌شوند، غالباً با دو متغیر تصادفی سروکار داریم: یکی زمان بین دو ورود متوالی گروهها و دیگری تعداد مشتریهای هر گروه.

عامل مهم دیگر، **همگن** بودن یا نبودن الگوی ورود مشتریها برحسب زمان است. آهنگ ورود مشتری می‌تواند در زمانهای مختلف ثابت، و یا غیرثابت باشد. مثلاً، الگوی ورود مشتری به یك سیستم تلفن، که در آن تعداد متقاضیان مکالمه درساعات شبانه‌روز یکسان نیست، غیرثابت است.

در برخی از سیستمها، آهنگ ورود مشتری به طول صف نیز بستگی دارد. مثلاً، اگر طول صفی زیاد باشد، ممکن است مشتری از ورود به این سیستم صف منصرف شود و به سیستم دیگری مراجعه کند. لذا درچنین سیستمی، آهنگ ورود مشتری آرامتر از آهنگ ورود مشتری در سیستم متشابهی است که صف طولانی ندارد.

ب. الگوی خدمت‌دهی

شناخت **الگوی خدمت‌دهی** (مدت زمانی که ارائهٔ خدمت به یك مشتری طول می‌کشد) نیز برای سنجش عملکرد سیستم ضرورت دارد. بدیهی است هرچه مدت خدمت‌دهی کمتر باشد، طول صف و زمان انتظار مشتریها نیز کمتر خواهد شد. مدت زمان خدمت هم معمولاً

ماهیت تصادفی دارد، و لذا برای محاسبهٔ معیارهای ارزیابی سیستم، تابع توزیع این متغیر تصادفی باید معلوم باشد. فرض کنید که مدت خدمت‌دهی به یك مشتری برابر با X باشد. اگر تابع توزیع این متغیر تصادفی را با $B(X)$ نشان دهیم، رابطهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$B(X) = P[X \leqslant x] \qquad (۲۰۱)$$

آهنگ خدمت‌دهی، طبق تعریف، عبارت از میانگین تعداد مشتریانی است که در واحد زمان از یك خدمت‌دهنده خدمت دریافت می‌کنند. اگر آهنگ خدمت‌دهی را با μ نشان دهیم، بدیهی است که بین μ و مدت خدمت دهی، یعنی X، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\mu = \frac{1}{E(X)} \qquad (۳۰۱)$$

از طرف دیگر، **آهنگ خروج مشتریان** را می‌توان میانگین تعداد مشتریانی تعریف کرد که در واحد زمان از سیستم خارج می‌شوند. بدیهی است که آهنگ خروج مشتریان بستگی به آهنگ خدمت‌دهی، تعداد خدمت‌دهنده و تعداد مشتریهای داخل سیستم دارد. مثلاً، اگر سیستم فقط دارای یك خدمت‌دهنده و این خدمت‌دهنده نیز دائماً مشغول به‌کار باشد، آهنگ خروج مشتریان و آهنگ خدمت‌دهی یکسان خواهد بود.

مدت خدمت‌دهی، ممکن است مستقل از طول صف و یا وابسته به‌آن باشد. مثلاً، در صورتی که طول صف زیاد شود، خدمت‌دهنده ممکن است (مثلاً با استفاده از ابزار بهتر) بر سرعت کار خود بیفزاید.

در این الگو نیز مدت خدمت‌دهی ممکن است نسبت به زمان ثابت یا متغیر باشد. مثلاً، اگر خدمت‌دهنده ماشینی باشد که در اثر فرسودگی کارایی آن پایین بیاید، طبعاً با مرور زمان مدت‌زمان خدمت‌دهی نیز افزایش می‌یابد.

خدمت‌دهنده نیز ممکن است همزمان به ارائهٔ خدمت به یك یا چند مشتری بپردازد.

ج. تعداد خدمت‌دهندگان

تعداد خدمت‌دهندگان در بازدهٔ سیستم مؤثر است. این خدمت‌دهندگان به‌صورت موازی عمل می‌کنند؛ یعنی، هرکدام به‌طور مستقل به یکی از مشتریها خدمت می‌دهند. گاهی به‌جای خدمت‌دهنده، از عبارت **کانال خدمت** استفاده می‌شود.

د. ظرفیت صف

منظور از **ظرفیت صف** حداکثر تعداد مشتریانی است که می‌توانند در صف قرار گیرند.

ظرفیت صف یا بینهایت، یا متناهی است. متناهی بودن ظرفیت صف می‌تواند ناشی از محدودیت فضای داخل سیستم مورد نظر باشد. در حالتی که ظرفیت صف متناهی باشد، ورود مشتریها تا زمانی ادامه می‌یابد که طول صف کمتر از ظرفیت آن باشد و از آن پس، از ورود مشتری جلوگیری می‌شود. درچنین حالتی فرض براین است که این مشتری دیگر منتظر نماند و از مراجعهٔ مجدد به‌سیستم منصرف گردد.

ه. جمعیت مشتریان بالقوه

طول صف و مدت زمان انتظار در صف و همچنین بیکار بودن سیستم، به جمعیت مشتریان (یعنی مشتریان بالقوهٔ سیستم) نیز بستگی دارد. اگر تعداد مشتریانی که می‌توانند مراجعه کنند (به‌عنوان مثال، تعداد مشتریان یك سیستم تلفن در یك شهر بزرگ) خیلی زیاد باشد، جمعیت مشتریان را می‌توان نامتناهی فرض کرد؛ ولی، درمواردی جمعیت مشتریان ممکن است متناهی باشد. این حالت از جمله در مورد ماشینهایی که در یك کارگاه ممکن است خراب شوند و منتظر تعمیر بمانند، صدق می‌کند.

و. نظم سیستم

منظور از نظم سیستم، نحوهٔ انتخاب مشتریهای داخل صف برای ارائهٔ خدمت است. در یك سیستم، موقعی که یکی از خدمت‌دهندگان بیکار و آمادهٔ ارائهٔ خدمت می‌شود، ضابطه‌های مختلفی برای انتخاب مشتری بعدی می‌تواند وجود داشته باشد. متداولترین روش، در نظر گرفتن نوبت است؛ یعنی اینکه کسی که زودتر وارد سیستم شده، و جلوتر از همه در صف قرار گرفته باشد، زودتر انتخاب می‌شود. این نظم را FIFO[1] می‌نامند. در برخی سیستمها ممکن است انتخاب مشتری برخلاف ضابطهٔ فوق باشد؛ یعنی، آن مشتری انتخاب شود که دیرتر از همه وارد سیستم شده است. نامه‌هایی که برای تایپ روی میز ماشین‌نویس انباشته می‌شود، معمولاً با این ضابطه ماشین می‌شود. به این نظم LIFO[2] می‌گویند. پایه دیگری برای انتخاب، ممکن است تصادف باشد، که SIRO[3] نامیده می‌شود؛ این مورد از جمله انتخاب قطعات یدکی در یك انبار را شامل می‌شود.

درنظر گرفتن اولویت برای مشتریهای مختلف، یکی ازمباحث مهم نظریهٔ صف است. در بسیاری از سیستمها، اهمیت مشتریها متفاوت است. برای گروههای مختلف مشتری، برحسب اهمیتی که برای سیستم دارند، اولویتهای گوناگون درنظر گرفته می‌شود. در بعضی از سیستمها، برخی از مشتریان ازچنان اولویت بالایی برخوردارند، که به‌محض ورود به‌سیستم، ارائهٔ خدمات به آنها شروع می‌شود. درمورد این مشتریها، خدمت دهنده موظف

1. First-In First-Out 2. Last-In First-Out
3. Service In Random Order

است بلافاصله کار خدمت دهی به‌آنها را شروع کند و حتی اگر لازم باشد، کار خدمت‌دهی به مشتریهای دیگر را نیمه تمام بگذارد. در بعضی از سیستمها ارائهٔ خدمت نیمه تمام نمی‌ماند، اما به مشتریانی با اولویت بالا، خدمت خارج از نوبت ارائه می‌شود.

ز. مراحل خدمت

در بعضی از سیستمها، خدمت ارائه شده شامل چند مرحله است. مثلاً، برای دریافت مجوز از یك سازمان دولتی باید چندین مرحله را پشت سر گذاشت. سیستمهایی با خدمات چند مرحله‌ای انواع مختلف دارند، که از جمله می‌توان سیستمهایی با مراحل خدماتی سری، موازی و ترکیبی از سری و موازی را نام برد.

۴.۱ نحوهٔ نمایش یك سیستم صف

یك سیستم صف را درحالت کلی به‌طور قراردادی به‌صورت $A/B/M/K/C/Z$ نشان می‌دهند. هرکدام از شش حرف فوق معرف یکی از عوامل اصلی سیستم است. A یا $A(X)$ تابع توزیع زمان بین دو ورود، B یا $B(X)$ تابع توزیع مدت خدمت‌دهی، m تعداد خدمت دهنده، K ظرفیت سیستم، C جمعیت مشتریان و Z نظام سیستم را نشان می‌دهد.

در قرارداد فوق، به جای A یا B، برحسب اینکه چه تابع توزیعی داشته باشند، از حروف زیر به‌عنوان کد استفاده می‌شود:

تابع توزیع	کد
نمایی	M
ارلانگی با r مرحله	E_r
قطعی	D
کلی	G

اگر ظرفیت صف بینهایت باشد، چهارمین حرف (یعنی K) و اگر جمعیت مشتریان بالقوه بینهایت باشد، پنجمین حرف (یعنی C) را می‌توان حذف کرد. همچنین اگر نظم سیستم برمبنای نوبت (یعنی FIFO) باشد، ششمین حرف نیز حذف می‌شود.

مثلاً، $M/M/۳$ معرف سیستم صفی است که زمان بین ورود متوالی دومشتری به‌صورت نمایی، مدت خدمت‌دهی به صورت نمایی و تعداد خدمت‌دهنده ۳ است. دراین سیستم، ظرفیت صف و جمعیت مشتریان بالقوه، بینهایت فرض شده ونظام سیستم بر مبنای رعایت نوبت است.

$D/E_5/۱/۱۰۰/$LIFO معرف سیستم صفی است که‌در آن زمان بین ورود متوالی

مشتریها ثابت (قطعی)، مدت خدمت طبق توزیع ارلانگی ۵ مرحله‌ای، سیستم دارای یك خدمت‌دهنده، ظرفیت آن ۱۰۰، جمعیت مشتریان نامتناهی و تنظیم سیستم به‌صورت LIFO است.

۵.۱ زمینه‌های کاربرد نظریهٔ صف

همان طور که گفته شد، اهمیت نظریهٔ صف از کاربرد وسیع آن در سیستمهای صنعتی و اجتماعی ناشی می‌شود. در زیر به بعضی از این‌کاربردها اشاره می‌کنیم.

الف. سیستمهای مخابراتی

قدیمی‌ترین زمینهٔ استفاده از نظریهٔ‌صف، سیستمهای مخابراتی‌است. در واقع باید گفت که این نظریه در خدمت مخابرات به‌وجود آمد. در اوائل قرن بیستم ارلانگ[1] دربارهٔ ظرفیت خطوط تلفن به مطالعه پرداخت. شبکهٔ مخابرات، سیستم صفی است که مشتریها برای مکالمه به آن مراجعه می‌کنند. چون‌امکان ندارد که برای هر دو نفر مشترك، یك‌خط تلفن اختصاصی ایجادشود، لذا کلا تعداد محدودی خط تلفن برای استفادهٔ همهٔ مشترکین به‌وجود می‌آید. اگر در یك لحظه تعداد خطوط موجود تکافوی همهٔ نیازها را ندهد، صف تشکیل می‌شود.

بررسی ارلانگ، در قالب نظریه‌های ریاضی، احتمالات و آمار، به تدریج توسعه یافت و نظریهٔ صف به‌وجود آمد. در دورهٔ بعد از جنگ دوم جهانی، که با رشد سریع تحقیق در عملیات و علوم و فنون وابسته بـه آن همراه بود، نظریهٔ صف نیز کاربردهای متعدد دیگری یافت، اما، مخابرات همچنان یکی از مهمترین‌کاربردهای این رشته است.

ب. شبکهٔ حمل و نقل

به‌طور کلی شبکه‌های حمل و نقل نوعی سیستم صف‌اند. خدمتی که عرضه می‌شود، حمل بار و مسافر از یك نقطه به نقطهٔ دیگر است. خدمت‌دهندگان ممکن است وسایل حمل و نقل و شبکهٔ راهها باشند. محدود بودن این خدمت‌دهندگان به ایجاد صف می‌انجامد؛ مثلا، در یك شبکهٔ اتوبوسرانی شهری، خدمت‌دهندگان، اتوبوسها هستند. بـه‌علت محدودیت تعداد آنها، صف مشتریها، که در اینجا شهروندان‌اند، تشکیل می‌شود. مثال دیگر، تراکم اتومبیلها پشت چراغ قرمز است. در اینجا، اتومبیلها مشتری سیستم و فضای چهار راه خدمت دهنده محسوب می‌شود. مطالعهٔ حمل و نقل و ترافیك‌از دیدگاههای مختلف، یکـی از عمده‌ترین کاربردهای نظریهٔ صف است.

1. Erlang

ج. فرودگاهها و بنادر

فرودگاهها و بنادر، گرچه جزئی از مجموعهٔ کل حمل و نقل هستند، به‌علت اهمیتی که دارند، درنظریهٔ صف به‌طور جداگانه بررسی می‌شوند. باندفرودگاه را می‌توان یك خدمت‌دهنده به‌حساب آورد. در هر لحظه فقط یك هواپیما (در فرودگاههای بزرگتر چند باند و چند هواپیما) می‌تواند روی باند بنشیند و یـا از آن بلند شود. به‌این ترتیب، در فرودگاههای پررفت و آمد، هواپیمـایی برای نشستن روی بانـد ممکن است مدتی (درحال پرواز در بالای فرودگاه) در صف انتظار بماند. عین همین موضوع در بنادر نیز ممکن است اتفاق بیفتد، کشتیها، بـه علت محدودیت امکانات تخلیه و بارگیری، ممکن است حتی ماهها در انتظار بمانند. در فرودگاهها و بنادر، سیستمهای صفی نیز به‌طور جنبی به‌وجود می‌آیند؛ نظیر: ارائهٔ خدمات به مسافر، بارگیری‌کامیونها در انبارهای توشه و نظایر آنها.

د. بیمارستانها و مراکز بهداشتی

می‌توان بیمارستان، یا حتی یك بخش آن را، یك سیستم صف فرض کرد. بیماران، مشتری و امکانات درمان (نظیر اطاق‌عمل، تزریقات، آزمایشگاه و...)، خدمت‌دهنده محسوب می‌شوند.

هـ. شبکهٔ پستی کشور

خدمتی که ارائه می‌شود، انتقال نامه و بسته‌های پستی از مبدأ مشخص بـه مقصد مورد نظر است. در اینجا مشتری، نامـه و خدمت‌دهنده، امکانات پست، نظیر نامـه‌رسان، وسایـل حمل و نقل بسته‌های پستی، و ماشینهای تفکیك نامه محسوب می‌شود.

و. سیستم تعمیر و نگهداری تأسیسات صنعتی

در این مورد ماشینهایی کـه خراب می‌شوند، نقش مشتری را دارند، و خدمتی کـه ارائه می‌شود انواع تعمیرات اضطراری و نگهداریهای برنامه‌ریزی شده است. خدمت‌دهندگان، تعمیرکاران و ابزار تعمیر هستند. بـرخلاف مثالهای بالا، کـه در آنهـا جمعیت مشتریان عملا نامتناهی بود، در این حالت جمعیت مشتریان فقط ماشین‌آلات کارخانـه و در نتیجه متناهی است.

ز. فرایند تولید کارخانجات

در یك خـط تولید (مثلا مونتاژ نهایی)، قطعاتی کـه باید به هـم متصل شوند، مشتری، و امکانات تولید، نظیر کارگران و ابزارها، خدمت‌دهنده محسوب می‌شوند. تعادل خط موقعی به‌وجود می‌آید که ورود مشتری به‌سیستم (یعنی حرکت قطعات از یك مرحلهٔ تولید به‌مرحلهٔ بعدی) متناسب با ظرفیت خط مونتاژ باشد؛ وگرنه در این‌صورت، یا صفی از قطعات به‌وجود

می‌آید، یا امکانات تولید بدون استفاده می‌ماند. در این حالت، برخلاف حالت قبلی، ورود مشتری معمولاً به صورت قطعی (با تقریب کافی) است.

نظریهٔ صف در زمینه‌های دیگر از جمله کامپیوتر، دادگاههای قضایی، ادارات دولتی، سیستم آموزش عالی، سیستمهای خدماتی (مانند پمپ بنزین، باجهٔ فروش بلیط ...) و سیستم موجودیها کاربردهای گسترده‌ای دارد.

مسائل

۱. اجزای سیستمهای صف زیر (نوع خدمت، خدمت دهنده، مشتری، صف، و جمعیت مشتریان) را مشخص کنید.

الف. بانك

ب. انبار ابزار کارخانه

ج. مرکز اورژانس شهر

د. جرثقیل هوایی در سالن کارخانه

ه. مخزن سد آب

و. خط تولید محصولی با سه نوع عملیات و یك مورد بازرسی در انتهای خط

ز. باجهٔ عوارض در ابتدای بزرگراه

۲. سیستم انبارداری محصولی را درنظر بگیرید، که تعداد موجودی آن محصول به‌اضافه تعدادی که سفارش داده‌شده‌است، همیشه برابر با N باشد. به‌عبارت دیگر، موقعی که یك واحد محصول فروخته می‌شود، بلافاصله برای جایگزینی آن واحدی دیگر از محصول سفارش داده شود. سیستم صفی را برای این مسئله تعریف کنید. خدمت‌دهنده، مشتری، نظم سیستم، زمان بین دو ورود مشتریها، و مدت‌زمان خدمت را مشخص کنید.

۳. پارکینگ اتومبیلی را با ظرفیت معین به‌صورت سیستم درنظر بگیرید، اجزای آن، یعنی نوع خدمت، خدمت‌دهندگان و تعداد آنها، مشتری، جمعیت مشتریان بالقوه، همگن بودن یا نبودن آهنگ ورود مشتری، مدت‌زمان خدمت، آهنگ خدمت‌دهی، و آهنگ خروج مشتری و طول صف را مشخص کنید.

۴. در یك سیستم صف، تعداد مشتریهایی که بین لحظهٔ صفر تا t مراجعه می‌کنند، را با $N(t)$ و زمان ورود مشتری n ام را با S_n بیان می‌کنیم. نشان دهید که

$$P[N(t)=n]=P[S_n\leqslant t,\quad S_{n+1}>t]$$

و

$$P[N(t)\geqslant n]=P[S_n\leqslant t]$$

$$P[N(t)=n]=P[S_n\leqslant t]-P[S_{n+1}\leqslant t]$$

۲

مروری بر احتمالات

در این فصل به‌مرور بر بعضی از تعاریف و مفاهیم نظریهٔ احتمال می‌پردازیم. برای بررسی جزئیات و درك عمیقتر مطالب، پیشنهاد می‌کنیم که به کتابهایی که در این‌زمینه نوشته شده است؛ مثلاً، کتابهای شمارهٔ ۵ و ۱۰، در لیست منابع و مآخذ، مراجعه شود.

۱.۲ فضای نمونه، پیشامد و احتمال

آزمایش یا تجربه‌ای را در نظر بگیرید که نتیجهٔ آن‌را نتوان به‌صورت **قطعی**، از قبل پیش‌بینی کرد؛ زیرا، به‌عامل شانس یا **تصادف** بستگی‌دارد. **فضای نمونه** عبارت‌ازمجموعهٔ نتیجه‌هایی است که می‌توان از این آزمایش انتظار داشت.

مثال ۱.۲ سیستم صفی را در نظر بگیرید که مدت زمان ارائهٔ خدمت در آن عموماً به‌صورت قطعی قابل پیش‌بینی نیست. فرض کنید که تجربه نشان داده است که مدت‌زمان خدمت در این سیستم، بین ۵ تا ۱۰ دقیقه است. در این‌صورت فضای نمونهٔ این آزمایش عبارت است از:

$$S=\{x\,|\,۵\leqslant x\leqslant ۱۰\}$$

مثال ۲.۲ یك مشتری وارد یك سیستم صف می‌شود، که حداکثر ظرفیت آن ۱۰ است. این مشتری نمی‌تواند پیش‌بینی کند که هنگام ورودش چند مشتری دیگرهم درسیستم

هستند. باوجود این، چون ظرفیت سیستم ۱۰ است، می‌توان اطمینان داشت که در هر لحظه بیش از ۱۰ مشتری در سیستم حضور ندارند. بنابراین، چنانچه نتیجهٔ آزمایش را تعداد مشتریان داخل سیستم تعریف کنیم، فضای نمونه عبارت خواهد بود از:

$$S=\{0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 10\}$$

بادانستن فضای نمونه، اگرچه نمی‌توان نتیجهٔ قطعی آزمایش را پیش‌بینی کرد، اما می‌توان مطمئن بود که نتیجهٔ حاصله فقط عنصری از مجموعهٔ فضای نمونه خواهد بود. هر زیرمجموعهٔ فضای نمونه را یك **پیشامد** می‌نامند. اگر S فضای نمونهٔ یك آزمایش باشد، مجموعهٔ E را در صورتی پیشامد می‌نامیم که

$$E\subset S \qquad (۱.۲)$$

در مثال ۱.۲، پیشامد می‌تواند مجموعهٔ زیر باشد

$$E=\{x|5\leqslant x\leqslant 6\}$$

در این پیشامد فقط بررسی خدمتهایی که کمتر از ۶ دقیقه طول می‌کشند، مد نظر است.

در مثال ۲.۲، پیشامد می‌تواند مجموعهٔ $E=\{0\}$ باشد، که در این صورت، هنگام ورود مشتری مورد نظر، سیستم خالی است.

احتمال وقوع یك پیشامد. در یك آزمایش، که فضای نمونهٔ آن S است، احتمال وقوع پیشامدی مانند E، که داخل این فضاست، براساس سه اصل زیر تعریف می‌شود:

$$0\leqslant P(E)\leqslant 1 \qquad (۲.۲)$$

$$P(S)=1 \qquad (۳.۲)$$

ج. چنانچه E_1 و E_2 دو پیشامد فضای S باشد و فصل مشترکی هم نداشته باشند (یعنی $E_1E_2=\Phi$)

$$P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2) \qquad (۴.۲)$$

طبق این اصل، احتمال اینکه نتیجهٔ آزمایش حداقل یکی از دو پیشامد فوق باشد، برابر با مجموع احتمالات آنهاست.

چند نتیجه‌گیری

با استفاده از سه اصل فوق می‌توان نتیجه‌گیریهای زیر را ارائه کرد، که در محاسبهٔ احتمالات پیشامدها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱.

$$P(E^c)=1-P(E) \qquad (۵.۲)$$

که E^c مکمل مجموعهٔ E است، یعنی

$$E\cdot E^c=\varnothing,\quad E\cup E^c=S$$

۲. اگر $E_1\subset E_2$ باشد

$$P(E_1)\leqslant P(E_2) \qquad (۶.۲)$$

۳. دو مجموعهٔ E_1 و E_2، که اشتراك آنها لزوماً مجموعهٔ تهی نیست، را در نظر بگیرید

$$P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1E_2) \qquad (۷.۲)$$

۴. فضای نمونهٔ S، که دارای N عنصر است، را در نظر بگیرید، یعنی

$$S=\{1,\ 2,\ \dots,\ N\}$$

چنانچه نتیجهٔ آزمایش بتواند هرکدام از عناصر فوق، با شانس مساوی، باشد

$$P(1)=P(2)=\dots=P(N)=\frac{1}{N} \qquad (۸.۲)$$

۲.۲ متغیر تصادفی

در اکثر موارد به‌جای بررسی پیشامدها به‌طور مستقیم، از مفهوم **متغیر تصادفی** برای بررسی پدیده‌های احتمالی استفاده می‌کنند. این کار باعث تسهیل محاسبات می‌شود. برحسب تعریف، متغیر تصادفی عبارت از تابعی عددی است که روی فضای نمونه تعریف می‌شود. به‌این ترتیب، به هر عنصر فضای نمونه، عددی اختصاص داده می‌شود. بدیهی است که می‌توان متغیرهای تصادفی متعددی را روی یك فضای نمونهٔ مشخص تعریف کرد.

در مثال ۲.۲ می‌توان متغیرهای تصادفی X و Y را به‌شرح زیر تعریف کرد:

X عبارت است از مدت زمان ارائه خدمت. این متغیر تصادفی می‌تواند همهٔ اعداد بین ۵ تا ۱۰ را انتخاب کند و Y چنین تعریف می‌شود

$$Y=\begin{cases} 0 & \text{اگر مدت زمان خدمت کمتر از ۶ دقیقه باشد} \\ 1 & \text{اگر مدت زمان خدمت بیش از ۶ دقیقه باشد} \end{cases}$$

این متغیر تصادفی فقط می‌تواند مقادیر صفر و یك را انتخاب کند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با وجود اینکه در آزمایش مورد نظر فقط یك فضای نمونه وجود دارد، متغیرهای تصادفی مختلف روی آن تعریف شده است. معمولاً متغیر تصادفی طوری تعریف می‌شود که راحت‌تر بتوان هدف مورد نظر را بیان کرد. در این مثال، اگر فقط زمان ارائه خدمت

مد نظر باشد، تعریف X مناسب است. چنانچه فرض شود که اگر مدت خدمت بیش از ۶ دقیقه طول بکشد جریمه‌ای بـه آن تعلق می‌گیرد، تنها طبقه‌بندی کـه می‌تواند مدنظر باشد این است که خدمتها یا مشمول جریمه می‌شود (یعنی بیشتر از ۶ دقیقه طول می‌کشد)، و یا نمی‌شود (کمتر یا مساوی ۶ دقیقه طول می‌کشد). در این حالت، فرضاً بین زمان خدمت ۷ دقیقه‌ای و ۸ دقیقه‌ای تفاوتی وجود ندارد.

از طرف دیگر، هر پیشامد را نیز می‌توان برحسب متغیر تصادفی به‌شکل $(X=x)$ یا $(X \leqslant x)$ بیان کرد.

تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X (که بـه‌اختصار آنرا تابع توزیع می‌نامند)، به‌ازای تمام مقادیر x (از $-\infty$ تا $+\infty$) به‌شرح زیر تعریف می‌شود.

$$F(x)=P(X\leqslant x) \qquad (۹.۲)$$

براساس این تعریف، می‌توان نتیجه‌گیری کرد کـه تابع توزیع متغیر تصادفی X دارای خواص زیر نیز هست:

الف. تابع توزیع تابعی افزاینده است. اگر $a\leqslant b$ باشد

$$F(a)\leqslant F(b) \qquad (۱۰.۲)$$

ب. مقدار تابع توزیع در $-\infty$ صفر است و در $+\infty$ به‌سمت یك میل می‌کند، یعنی

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty} F(x)=1 \qquad (۱۱.۲)$$

ج. رابطهٔ زیر به‌ازای همهٔ مقادیر $a\leqslant b$ همواره برقرار است،

$$P(a<x\leqslant b)=F(b)-F(a)$$

د. چنانچه در نقطه‌ای مانند x تابع توزیع منقطع باشد،

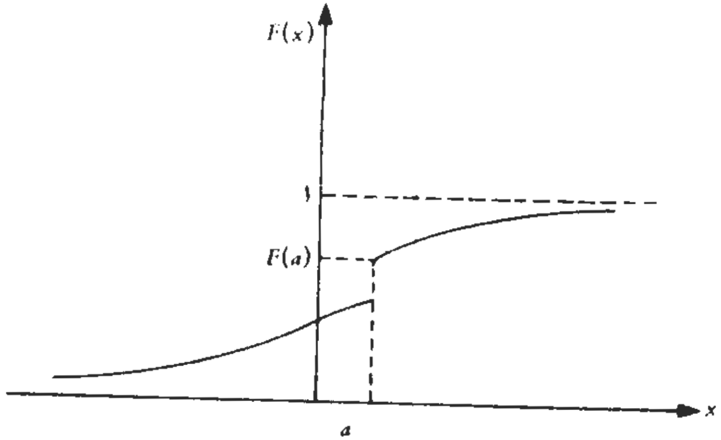
$$F(x)=\lim_{y\to 0} F(x+y) \qquad (۱۲.۲)$$

و

$$\lim_{y\to 0} F(x-y)<F(x) \qquad (۱۳.۲)$$

یعنی در چنین نقطه‌ای مقدار تابع از شاخهٔ سمت راست منحنی تابع بـه‌دست می‌آید و با توجه به‌خاصیت افزاینده بودن تابع، این‌مقدار از مقادیر شاخهٔ سمت چپ بیشتر است. به‌عبارت دیگر $F(x)$ تابعی است که از سمت راست پیوسته است. شکل ۱.۲ این موضوع را نشان می‌دهد.

متغیر تصادفی بر دو نوع است. گسسته و پیوسته.



شکل ۱.۲ خاصیت پیوستگی از سمت راست در یك تابع توزیع

الف. متغیر تصادفی گسسته

چنانچه متغیری تصادفی فقط مقادیر یك **مجموعهٔ قابل شمارش** را انتخاب کند، به‌آن **متغیر تصادفی گسسته** می‌گویند. تعداد عناصر این مجموعه می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. برحسب تعریف، **تابع احتمال** این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$p(a)=P(X=a) \qquad (۱۴.۲)$$

که a یکی از عناصر مجموعهٔ قابل شمارش فوق است. مجموع احتمالات، به‌ازای تمام عناصر این مجموعه برابر با یك است، یعنی

$$\sum_{a=-\infty}^{+\infty} p(a)=1 \qquad (۱۵.۲)$$

در عمل، گاهی استفاده از مفهوم تابع توزیع یك متغیر تصادفی راحت‌تر از مفهوم تابع احتمال است. تابع توزیع را می‌توان برحسب تابع احتمال، به‌شرح زیر بیان کرد.

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{a=-\infty}^{x} p(a) \qquad (۱۶.۲)$$

مثال ۳.۲ یك متغیر تصادفی دارای تابع احتمالی به‌شرح زیر است:

$$p(0)=0.2 \qquad p(1)=0.1, \qquad p(2)=0.1, \qquad p(2)=0.2,$$
$$p(5)=0.3, \qquad p(6)=0.1$$

تابع توزیع این متغیر تصادفی را تعیین کنید.

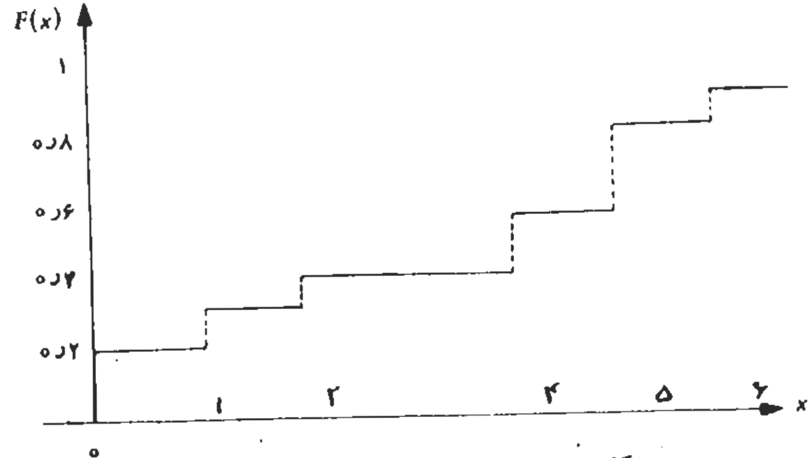
حل: طبق تعریف، تابع توزیع این متغیر تصادفی را به‌شرح زیر می‌توان بیان کرد:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0.2 & 0\leqslant x<1 \\ 0.3 & 1\leqslant x<2 \\ 0.4 & 2\leqslant x<4 \\ 0.6 & 4\leqslant x<5 \\ 0.9 & 5\leqslant x<6 \\ 1 & 6\leqslant x \end{cases}$$

منحنی $F(x)$ نسبت به x در شکل ۲-۲ نشان داده شده است از طرف دیگر، با معلوم بودن تابع توزیع یک‌متغیر تصادفی گسسته، می‌توان تابع احتمال آن‌را تعیین کرد. دراین‌مورد، مقدار تابع احتمال در همهٔ نقاط برابر با صفر است، به‌استثنای نقاطی که در آنها تابع توزیع دارای جهش است. درچنین نقاطی مقدار تابع احتمال برابر با مقدارجهش است. با مراجعه به‌شکل فوق، صحت این امر روشن می‌شود.

تعدادی از توابع توزیع اهمیت خاصی دارند که مهمترین آنها عبارت‌اند از:

توزیع برنولی. برحسب تعریف، هر متغیر تصادفی که فقط بتواند دو مقدار مشخص را انتخاب کند، دارای تابع توزیع برنولی است. به‌عنوان نمونه، آزمایشی را در نظر بگیرید که نتیجه آن صرفاً موفقیت یا شکست باشد براین‌اساس، متغیری تصادفی رامی‌توان تعریف کرد که فقط مقادیر یک و صفر را انتخاب کند، به‌ترتیب، معرف موفقیت و شکست آزمایش هستند. چنانچه p احتمال موفقیت و $(1-p)$ احتمال شکست آزمایش باشد،



شکل ۲-۲ تابع توزیع متغیر تصادفی در مثال ۳-۲

تابع احتمال این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$p(1)=p,\quad p(0)=1-p \qquad (۱۷\text{-}۲)$$

توزیع دوجمله‌ای. فرض کنید که n آزمایش برنولی (با نتایج موفقیت یا شکست) مستقلا انجام شود. تعداد موفقیتهای این مجموعه آزمایشها، متغیری تصادفی با توزیع دوجمله‌ای، به‌شرح زیر است

$$p(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\quad,\quad x=0,1,\cdots,n \qquad (۱۸\text{-}۲)$$

که p احتمال موفقیت هر آزمایش برنولی است.

توزیع هندسی. دراین‌مورد نیز فرض کنید که تعدادی آزمایش برنولی مستقلاانجام شود. چنانچه X را تعداد آزمایشها تا اولین موفقیت در نظر بگیریم، X متغیری تصادفی با توزیع هندسی به‌شرح زیر است.

$$p(x)=p(1-p)^{x-1}\quad,\quad x=1,2,\cdots \qquad (۱۹\text{-}۲)$$

توزیع پواسون. متغیر تصادفی x دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است. اگر

$$p(x)=e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^x}{x!}\quad,\ x=0,1,2,3,\ldots \qquad (۲۰\text{-}۲)$$

به‌علت اهمیت توزیع پواسون در نظریهٔ صف، دربارهٔ آن به‌تفصیل در فصل سوم بحث خواهیم کرد.

ب. متغیر تصادفی پیوسته

چنانچه متغیری تصادفی بتواند همهٔ مقادیر یک مجموعهٔ غیرقابل شمارش (پیوسته) را انتخاب کند، به‌آن متغیر تصادفی پیوسته می‌گویند. مثلا، مدت زمان ارائه خدمت در یک سیستم صف معمولا یک‌متغیر تصادفی پیوسته است. هرمتغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع آن، یعنی $F(x)$ مشخص می‌شود. در مقایسه با تابع احتمال در مورد متغیرهای تصادفی گسسته، **تابع چگالی** در مورد متغیرهای تصادفی پیوسته به‌شرح زیر تعریف می‌شود.

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x) \qquad (۲۱\text{-}۲)$$

متقابلا، تابع توزیع یک متغیر تصادفی پیوسته‌برحسب **تابع چگالی** آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy \qquad (۲۲.۲)$$

احتمال وقوع یك پیشامد را می‌توان با استفاده از تابع توزیع یـا تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته به‌دست آورد.

$$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(y)dy \qquad (۲۳.۲)$$

در واقع، احتمال اینکه مقدار متغیر تصادفی بین دو عدد a و b باشد، برابر بـا مساحت زیر منحنی تـابع چگالی در همین فاصله است (شکل ۳.۲). از طرف دیگر، طبق رابطهٔ (۲۳.۲)، احتمال اینکه یك متغیر تصادفی پیوسته، دقیقاً مقدار مشخصی مانند a را انتخاب کند، برابر با صفر است، یعنی

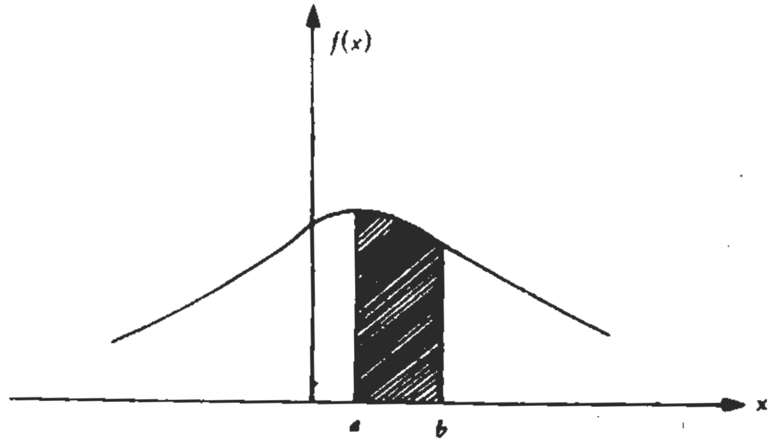
$$P(X=a)=\int_{a}^{a} f(x)dx=0 \qquad (۲۴.۲)$$

در نتیجه، می‌توان نشان داد که

$$P(X<a)=P(X\leqslant a) \qquad (۲۵.۲)$$

ضمناً، با توجه به‌رابطه‌های (۱۱.۲) و (۲۳.۲)، مساحت زیر منحنی تـابع چگالی برابر با یك خواهد بود، یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \qquad (۲۶.۲)$$



شکل ۳.۲ تابع چگالی یك متغیر تصادفی پیوسته

درمورد متغیرهای تصادفی پیوسته نیز تعدادی از آنها از اهمیت بیشتری برخوردارهستند، کـه عبارت‌اند از: **توزیـع نمایی؛ توزیـع گامـا؛ توزیـع ارلانگی؛ توزیـع فوق‌نمایی؛ توزیع نرمال.**

سه نوع توزیع اول را به تفصیل در فصل سوم مـورد بررسی قرار خواهیم داد. برای مطالعهٔ بیشتردرمورد توابع‌توزیع‌فوق نمایی‌ونرمال به‌مراجع ۵ و ۱۰ مراجعه‌شود.

۳.۲ امید ریاضی

امید ریاضی یك متغیر تصادفی گسسته مانند X، که با $E(X)$ نشان داده می‌شود، برحسب تعریف، عبارت است‌از:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)=E[X] \qquad (۲۷.۲)$$

که X_iها مقادیر ممکنی هستند که متغیر تصادفی می‌تواند انتخاب کند. چنانچه متغیر تصادفی پیوسته باشد، امید ریاضی آن، از رابطهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \qquad (۲۸.۲)$$

قضیهٔ ۱.۲: بهازای تمام اعداد ثابت a و b، رابطه‌های زیر صادق است.

$$E(aX+b)=aE(X)+b \qquad (۲۹.۲)$$

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y) \qquad (۳۰.۲)$$

امید ریاضی تابعی از متغیر تصادفی

در مواردی، ممکن است بـه‌جای محاسبهٔ امید ریاضی متغیر تصادفی، امید ریاضی تابعی چون g از آن مـد نظر باشد، که دراین حالت، طبق تعریف، از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$E[g(X)]=\sum_{x} g(x)p(x) \quad , \quad \text{اگر } X \text{ گسسته باشد} \qquad (۳۱.۲)$$

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \quad , \quad \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد} \qquad (۳۲.۲)$$

حالت خاصی که کاربردهای متعدد دارد، محاسبهٔ **گشتاور nام** یك متغیر تصادفی، بـه‌شکل $E(X^n)$ بهازای ۱ تا n است. (گشتاور اول، همان میانگین متغیر تصادفی است).

واریانس متغیر تصادفی

واریانس یك متغیر تصادفی، بهشرح زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{var}(X)=E[(X-E[X])^2] \tag{۳۳.۲}$$

واریانس شاخصی است که پراکندگی مقادیر متغیر تصادفی را نسبت به میانگین آن می‌سنجد. می‌توان نشان داد که چگونه واریانس را می‌شود از رابطه زیر بهدست آورد.

$$\mathrm{var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2 \tag{۳۴.۲}$$

۴.۲ تابع توزیع توأم

دو متغیر تصادفی X و Y را درنظر بگیرید، که **تابع توزیع توأم** آنها بهشرح زیر تعریف می‌شود.

$$F(x,y)=P(X\leqslant x,\ Y\leqslant y) \tag{۳۵.۲}$$

در عبارت فوق احتمال اینکه هردو پیشامد اتفاق بیفتد، مدنظر است.

تابع توزیع هر کدام از این متغیرهای تصادفی را می‌توان از تابع توزیع توأمشان بهدست آورد. برای این منظور با تخصیص همهٔ مقادیر ممکن بهمتغیر تصادفی دیگر، آن را بی‌اثر می‌سازیم. بدین ترتیب،

$$F_X(x)=P[X\leqslant x,\ Y<\infty]=\lim_{y\to\infty}F(x,y)=F(x,\infty) \tag{۳۶.۲}$$

در عبارت فوق، $F_X(x)$ معرف تابع توزیع X، بهتنهایی، است و **توزیع نهایی** نامیده می‌شود.

چنانچه دو متغیر تصادفی مورد نظر پیوسته باشد، یك تابع چگالی توأم، مانند $f(x,y)$ رابطهٔ آنها را مشخص می‌سازد. در این‌صورت، احتمال اینکه مقادیر این دو متغیر از مجموعهٔ مشخصی انتخاب شود، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود.

$$P\{(X,Y)\in C\}=\iint_{(x,y)\in C} f(x,y)\,dx\,dy \tag{۳۷.۲}$$

در این حالت، تابع توزیع توأم آنها نیز بههمین صورت بهدست می‌آید.

$$F(a,b)=P(X\leqslant a,\ Y<b) \tag{۳۸.۲}$$

از طرف دیگر، تابع چگالی توأم را نیز می‌توان از تابع توزیع توأم بهدست آورد.

$$f(a,b)=\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial b}F(a,b) \tag{۳۹.۲}$$

با استفاده از تابع چگالی توأم، می‌توان تابع چگالی هر متغیر تصادفی را جداگانه محاسبه کرد

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \tag{۴۰.۲}$$

مثال ۴.۲ دو متغیر تصادفی X و Y را، که تابع چگالی توأم آنها بهشرح زیر است، درنظر بگیرید. $F_Y(y)$ را محاسبه کنید.

حل:

$$f(x,y)=\begin{cases}2y(x-y)e^{-(x+y)}, & 0<x<\infty,\ 0\leqslant y\leqslant x\\ 0, & \text{درغیراینصورت}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx=\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\,dx+\int_{y}^{\infty}f(x,y)\,dx$$

در انتگرال اول عبارت فوق، چون مقدار x از y کوچکتر است، تابع چگالی توأم و در نتیجه مقدار انتگرال برابر با صفر است. پس‌از انتگرالگیری جزء بهجزء قسمت دوم، نتیجهٔ زیر بهدست می‌آید

$$f_Y(y)=2y$$

پیشامدها و متغیرهای تصادفی مستقل

دو پیشامد E_1 و E_2 را مستقل می‌نامند، اگر رابطهٔ زیر در مورد آنها صدق کند.

$$P(E_1E_2)=P(E_1)P(E_2) \tag{۴۱.۲}$$

بههمین‌ترتیب، دومتغیر تصادفی X و Y درصورتی مستقل هستند که بهازای همهٔ مجموعه‌های عددی A و B رابطهٔ زیر صادق باشد:

$$P\{X\in A,\ Y\in B\}=P\{X\in A\}P\{Y\in B\} \tag{۴۲.۲}$$

بنابراین، از رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود که بهازای تمام مقادیر عددی x و y خواهیم‌داشت.

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y) \tag{۴۳.۲}$$

$$P(x,y)=P_X(x)P_Y(y) \tag{۴۴.۲}$$

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (۲۵.۲)$$

و

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad (۲۶.۲)$$

کوواریانس دو متغیر تصادفی

کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y را به‌شرح زیر تعریف می‌کنیم.

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \quad (۲۷.۲)$$

رابطهٔ فوق را به‌شکل زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (۲۸.۲)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در مورد دو متغیر تصادفی مستقل، مقدار کوواریانس برابر با صفر است.

واریانس مجموع دو متغیر تصادفی

قضیه ۲.۲ رابطهٔ زیر همیشه صدق می‌کند.

$$\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y) + ۲\operatorname{cov}(X, Y) \quad (۲۹.۲)$$

چنانچه دو متغیر تصادفی X و Y مستقل باشند، واریانس مجموع آنها برابر با مجموع واریانس‌های آنهاست.

۵.۲ احتمال شرطی

منظور از احتمال شرطی یك پیشامد، مثلا $P(E|F)$، احتمال اتفاق افتادن پیشامد E است، مشروط بر اینکه پیشامد F اتفاق افتاده باشد. بدین‌ترتیب، با درنظر گرفتن اطلاعات جدیدی که در مورد اتفاق افتادن پیشامد F داریم، و همچنین رابطهٔ بین E و F، قضاوت بهتری دربارهٔ احتمال اتفاق افتادن یا نیفتادن پیشامد E خواهیم داشت.

احتمال شرطی با استفاده از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} \quad (۵۰.۲)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، چنانچه دو پیشامد فوق مستقل باشند، طبق رابطهٔ (۲۱.۲) نتیجهٔ عبارت فوق $P(E)$ خواهد بود. یعنی، پیشامد F تأثیری بر روی E نخواهد داشت.

مثال ۵.۲ فرض کنید سه سکه را پرتاب می‌کنیم. احتمال پیشامد E، آمدن حداقل ۲ شیر در سه پرتاب، را در حالتهای زیر محاسبه کنید.

الف. بدون هیچ اطلاعات اضافی: در این حالت فضای نمونه دارای هشت عنصر است، که در چهار عنصر آن حداقل دو شیر وجود دارد. لذا

$P(E) =$ ۰٫۵

ب. با اطلاع از اینکه نتیجهٔ اولین پرتاب، شیر بوده است: این پیشامد، یعنی شیر بودن نتیجه اولین پرتاب، را با F نشان می‌دهیم. بنابراین، هدف، محاسبهٔ $P(E|F)$ است. این عبارت را می‌توانیم مستقیماً و یا با استفاده از رابطهٔ (۵۰.۲) به‌دست آوریم. محاسبهٔ مستقیم به‌شرح زیر انجام می‌شود.

$P(E|F) = P($یك یا دو شیر آمدن نتیجه در دو آزمایش باقیمانده$)$

$= ۱ - P($خط آمدن نتیجه در هر دو آزمایش باقیمانده$)$

$= ۱ -$ ۰٫۲۵ $=$ ۰٫۷۵

چنانچه بخواهیم از رابطه (~~۴۸.۲~~ ۵۰) استفاده کنیم، خواهیم داشت.

$P(EF) = P($آمدن حداقل دو شیر [illegible] در پرتاب اول$)$

$= P($شیر آمدن نتیجهٔ اولین پرتاب به‌اضافهٔ شیر آمدن نتیجهٔ حداقل یکی از دو پرتاب دیگر$)$

$= \frac{۳}{۸}$

و

$P(F) = P($شیر آمدن نتیجهٔ اولین پرتاب سکه$)$

$=$ ۰٫۵

لذا طبق رابطهٔ (۵۰.۲)

$P(E|F) =$ ۰٫۷۵

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در دو حالت فوق، الف و ب، اگرچه یك پدیدهٔ مشخص و منحصر به‌فرد (به‌دست آمدن حداقل دو شیر در سه پرتاب) مورد بررسی قرار گرفته است، چون اطلاعات موجود در این دو حالت متفاوت است، نتایج به‌دست آمده نیز یکسان نیست.

مثال ۶.۲ دو مشتری وارد یك سیستم شده‌اند. به فرض اینکه هر مشتری به‌احتمال ۰٫۶ مرد باشد، احتمال مرد بودن هر دو مشتری، پیشامد E، را در سه حالت زیر حساب کنید.

الف. بدون هیچ اطلاعات اضافی

$$P(E)=(0.6)(0.6)=0.36$$

ب. با دانستن اینکه اولین مشتری مرد است (پیشامد F)

$$P(E|F)=\frac{P(EF)}{P(F)}$$

$$P(EF)=P(\text{مرد بودن هر دو مشتری و همچنین مرد بودن اولین مشتری})$$

$$P(\text{مرد بودن هر دو مشتری})=0.36$$

و

$$P(F)=0.6$$

در نتیجه

$$P(E|F)=0.6$$

ج. با دانستن اینکه حداقل یکی از دو مشتری مرد است (پیشامد G)

$$P(E|G)=\frac{P(EG)}{P(G)}$$

$$P(EG)=0.36$$

$$P(G)=1-P(\text{زن بودن هر دو مشتری})=1-0.16=0.84$$

در نتیجه

$$P(E|G)=\frac{0.36}{0.84}=\frac{3}{7}=0.43$$

درصورتی که پیشامدها برحسب متغیر تصادفی بیان شده باشند، رابطه (۵۰.۲) همچنان معتبر است و به‌یکی از شکلهای زیر بیان می‌شود:

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x,\ Y=y)}{P(Y=y)} \qquad (۵۱.۲)$$

$$P(X\leqslant x|Y=y)=\frac{P(X\leqslant x,\ Y=y)}{P(Y=y)} \qquad (۵۲.۲)$$

(مشروط براینکه در دو عبارت فوق مخرج کسر برابر با صفر نباشد)

مثال ۷.۲ تعداد مشتریانی که در ساعت اول وارد سیستمی می‌شوند را با X وتعداد

آنهایی راکه در دومین ساعت وارد می‌شوند با Y نشان می‌دهیم. فرض می کنیم که این‌دو متغیر تصادفی دارای توزیع پواسون و با پارامترهای λ_1 و λ_2 هستند. تابع توزیع X را با آگاهی از اینکه $X+Y=n$ است، حساب کنید.

حل: با استفاده از رابطهٔ (۴.۲) و با توجه به‌اینکه X و Y مستقل هستند، داریم

$$P\{X=k|X+Y=n\}=\frac{P\{X=k,\ X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}}$$

$$=\frac{P\{X=k,\ Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}$$

$$=\frac{P\{X=k\}P\{Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}$$

از طرفی می‌دانیم که مجموع دومتغیر تصادفی با توزیع‌پواسون نیز دارای توزیع‌پواسون (با پارامتری برابر با مجموع پارامترها) خواهد بود. بنابراین

$$P\{X=k|X+Y=n\}=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!}\ \frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\left[\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\right]^{-1}$$

$$=\frac{n!}{(n-k)!k!}\ \frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

بدین ترتیب، متغیر تصادفی X، با معلوم بودن $X+Y=n$، دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$ خواهد بود.

۶.۲ امید شرطی

امیدریاضی X، مشروط براینکه متغیر تصادفی‌دیگری‌مانند Y مقدارمشخصی مانند y را انتخاب کند، به‌شکل $E(X|Y=y)$ نشان داده می‌شود. درحالتی‌که Y گسسته باشد، امید شرطی را می‌توان نظیر هر متغیر تصادفی دیگر، به‌شرح زیر محاسبه کرد:

$$E(X|Y=y)=\sum_x xP(X=x|Y=y) \qquad (۵۳.۲)$$

درحالتی‌که Y پیوسته باشد، امید شرطی را می‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست آورد.

$$E(X|Y=y)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx} \qquad (۵۴.۲)$$

مثال ۷.۲ در مثال (۴.۲)، امید شرطی $E(X|Y=y)$ را محاسبه کنید.
حل: پس از انتگرالگیری صورت کسر بصورت جزء‌به‌جزء و با استفاده‌از نتیجهٔ مثال فوق، تساوی زیر بدست می‌آید.

$$E(X|Y=y)=y+2$$

۷.۲ به‌کارگیری احتمال شرطی در محاسبهٔ امید ریاضی یک متغیر تصادفی

اگر محاسبهٔ $E(X)$ بطور مستقیم امکانپذیر نباشد، می‌توان با استفاده از یک متغیر تصادفی دیگر مانند Y و به‌کمک قضیهٔ زیر چنین محاسبه‌ای را انجام داد.
قضیه ۳.۲ رابطه‌های زیر همواره برقرار است:

الف. اگر Y گسسته باشد، $$E[X]=\sum_y E\{X|Y=y\}P\{Y=y\} \qquad (۵۵.۲)$$

ب. اگر Y پیوسته باشد، $$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y=y]f_Y(y)\,dy \qquad (۵۶.۲)$$

اثبات: X و Y می‌توانند پیوسته یـا گسسته باشند. در نتیجه، چهار حالت مختلف ممکن است اتفاق بیفتد. برای نمونه، حالتی‌را درنظر بگیرید که هردو متغیر تصادفی X و Y گسسته باشد. در این‌صورت، رابطهٔ فوق به‌شکل زیر اثبات می‌شود:

$$\begin{aligned}\sum_y E[X|Y=y]P\{Y=y\} &= \sum_y\sum_x xP\{X=x|Y=y\}P\{Y=y\}\\ &= \sum_y\sum_x x\frac{P\{X=x,Y=y\}}{P\{Y=y\}}P\{Y=y\}\\ &= \sum_y\sum_x xP\{X=x,Y=y\}\\ &= \sum_x x\sum_y P\{X=x,Y=y\}\\ &= \sum_x xP\{X=x\}\\ &= E[X].\end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای اینکه بتوان از قضیهٔ فوق جهت محاسبهٔ $E(X)$ استفاده کرد، لازم است که بتوان متغیر تصادفی جدیدی مانند Y پیدا کرد، که، اولا تابع توزیع آن و، ثانیاً رابطهٔ وابستگی بین X و Y، یعنی $E(X|Y=y)$، مشخص باشد.
مثال ۸.۲ سکه‌ای را در نظر بگیرید، که احتمال آمدن شیر در موقع پرتاب آن p فرض می‌شود. این‌سکه را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا اولین شیر بدست آید. اگر N معرف تعداد پرتابهای سکه تا اولین شیر باشد، $E(N)$ را حساب کنید.
حل: از رابطهٔ (۶.۲) برای محاسبهٔ $E(N)$ استفاده می‌کنیم. برای این منظور باید متغیر جدیدی معرفی کرد، که هم تابع توزیع آن وهم چگونگی رابطهٔ آن با متغیرتصادفی مورد نظر، یعنی N، معلوم باشد. این‌متغیر تصادفی جدید، نتیجهٔ اولین پرتاب، به‌شرح‌زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$Y=\begin{cases}1 & \text{اگر نتیجهٔ اولین پرتاب شیر باشد}\\ 0 & \text{اگر نتیجهٔ اولین پرتاب خط باشد}\end{cases}$$

بنابراین، طبق رابطهٔ (۵۵.۲) و با درنظرگرفتن اینکه احتمال آمدن شیر در هرپرتاب p باشد، داریم:

$$\begin{aligned}E(N)&=E(N|Y=1)P(Y=1)+E(N|Y=0)P(Y=0)\\ &=pE(N|Y=1)+(1-p)E(N|y=0)\end{aligned}$$

بدیهی است که

$$E(N|Y=1)=1$$

حال فرض کنید که نتیجهٔ‌اولین پرتاب‌شیر نباشد، یعنی $Y=0$ باشد. دراین‌صورت، با توجه به‌اینکه پرتابها مستقل از یکدیگرند، میانگین تعداد پرتابهای لازم بعد از اولین پرتاب، برابر با $E(N)$ خواهد بود، یعنی

$$E(N|Y=0)=1+E(N)$$

در نتیجه

$$E(N)=p+(1-p)[1+E(N)]$$

یا

$$E(N)=\frac{1}{p}$$

۸.۲ کاربرد احتمال شرطی در محاسبهٔ احتمال یک پیشامد

چنانچه محاسبهٔ مستقیم یک پیشامد دشوار یا غیر ممکن باشد، می‌توان با استفاده از رابطه‌های احتمال شرطی، شبیه رابطه‌های مربوط به امید شرطی، و طبق قضیهٔ زیر چنین محاسبه‌ای را انجام داد.

قضیهٔ ۴.۲ رابطه‌های زیر همواره برقرار است:

(۵۷.۲) الف. اگر Y گسسته باشد، $P(A)=\sum_{y} P(A|Y=y)P(Y=y)$

(۵۸.۲) ب. اگر Y پیوسته باشد، $P(A)=\int_{-\infty}^{\infty} P(A|Y=y)f(y)\,dy$

اثبات: متغیر تصادفی X را به‌شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$X=\begin{cases} ۱ & \text{اگر } A \text{ اتفاق بیفتد} \\ ۰ & \text{اگر } A \text{ اتفاق نیفتد} \end{cases}$$

بدیهی است که طبق تعریف میانگین متغیر تصادفی، میانگین X عبارت است از:

$$E(X)=P(A)$$

از طرف دیگر، طبق تعریف امید شرطی داریم:

$$E(X|Y=y)=\sum_{x} xP(X=x|Y=y)=P(X=1|Y=y)=P(A|Y=y) \qquad (۵۹.۲)$$

با استفاده از رابطه‌های (۵۹.۲) و (۵۵.۲)، این قضیه به‌شرح زیر ثابت می‌شود:

$$P(A)=E(X)=\sum_{y} E(X|Y=y)P(Y=y)=\sum_{y} P(A|Y=y)P(Y=y)$$

مثال ۹.۲ تعداد مشتریهایی که هر روز به‌یک سیستم مراجعه می‌کنند، متغیر تصادفی با توزیع پواسون و میانگین آن ۱۰ مشتری در روز است. هر مشتری با احتمال ۰٫۶ و مستقل از سایر مشتریها، از دریافت خدمت منصرف، و از سیستم خارج می‌شود. احتمال اینکه در یک روز مشخص ۱۵ مشتری برای دریافت خدمت بمانند، چیست؟

حل: تعداد مشتریهایی که برای دریافت خدمت می‌مانند را X می‌نامیم. بنابراین، سؤال مسئله، محاسبهٔ $P(X=15)$ است. به جای محاسبهٔ مستقیم، از احتمال شرطی، یعنی رابطهٔ (۵۷.۲)، استفاده می‌کنیم. برای این منظور، از متغیر تصادفی N، تعداد مشتریهایی که در روز مراجعه می‌کنند، کمک گرفته می‌شود. به‌این ترتیب،

$$P(X=15)=\sum_{n=15}^{\infty} P(X=15|N=n)P(N=n) \qquad (۶۰.۲)$$

در رابطهٔ فوق، بدیهی است که چنانچه $n<15$ باشد (یعنی تعداد کل مراجعین به سیستم کمتر از ۱۵ مشتری باشد)، امکان اینکه ۱۵ مشتری خدمت دریافت کرده باشند، وجود ندارد. اما، اگر $n\geq 15$ باشد، می‌دانیم که هر مشتری که وارد شده است، به‌احتمال ۰٫۴ خدمت دریافت کرده، و به‌احتمال ۰٫۶ خدمت دریافت نکرده‌است. بنابراین، با یک توزیع دوجمله‌ای سروکار داریم، که در آن $P=0.4$ و $k=15$ است

$$P\{X=k|N=n\}=\begin{cases} \binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}, & \text{مشروط براینکه } n\geq k \\ 0, & \text{مشروط براینکه } n<k \end{cases}$$

با جایگزینی عبارت فوق در رابطهٔ (۶۰.۲) و با در نظر گرفتن اینکه N دارای توزیع پواسون است، نتیجه می‌شود که

$$P\{X=k\}=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\frac{P^k(1-P)^{n-k}e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{(\lambda P)^k(\lambda(1-P))^{n-k}e^{-\lambda}}{n!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}(\lambda P)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda(1-P))^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda P)^k}{k!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-P))^i}{i!}$$

$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda P)^k}{k!}e^{\lambda(1-P)}$$

$$=e^{-\lambda P}\frac{(\lambda P)^k}{k!}$$

در نتیجه، X دارای توزیع پواسون با میانگین ($\lambda P=4$) است.

مثال ۱۰.۲ چنانچه X و Y متغیرهای تصادفی نمایی با پارامترهای λ و μ باشند، احتمال $P(X<Y)$ را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از رابطهٔ (۵۸.۲)، با فرض اینکه $X=x$ باشد، احتمال پیشامد $(X<Y)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$P(X<Y)=\int_{0}^{\infty}P(X<Y|X=x)f(x)\,dx$$

مفهوم $P(X<Y|X=x)$، احتمال بزرگتر بودن Y از متغیر تصادفی X است، به شرط اینکه مقدار x مشخص باشد. بنابراین،

$$P[X<Y|X=x]=P[Y>x]=e^{-\mu x}$$

قسمت آخر رابطهٔ فوق، با استفاده از فرض نمایی بودن متغیر تصادفی Y بدست آمده است. در نتیجه

$$P(X<Y)=\int_0^{\infty}(e^{-\mu x})(\lambda e^{-\lambda x})\,dx$$

یا

$$P(X<Y)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \qquad (۶۱.۲)$$

۹.۲ فرمول بیز

فرمول احتمال شرطی را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$P(A|B)=\frac{P(A,B)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

با استفاده از رابطهٔ (۵۰.۲)، نتیجه می‌شود:

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)} \qquad (۶۲.۲)$$

مثال ۱۰.۲ محصولات کارخانه‌ای در دو کارگاه تولید می‌شود. در کارگاه اول، ۹۰ درصد کالاها و در کارگاه دوم فقط ۴۰ درصد آنها با استاندارد تطبیق می‌کند. چنانچه یک‌واحدکالا با استاندارد تطبیق کند، با چه احتمالی در کارگاه اول تولید شده است؟ فرض می‌کنیم میزان تولید کارگاه اول سه برابر تولید کارگاه دوم است.

حل: پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

A. کالا از گروه یك انتخاب شده باشد؛

B. کالا با استاندارد تطبیق کند.

بنابراین مسئلهٔ مورد نظر محاسبهٔ $P(A|B)$ است. اجزای رابطهٔ (۶۲.۲) را جداگانه بدست می‌آوریم:

$$P(B|A)=۰٫۹$$
$$P(B|A^c)=۰٫۴$$

$$P(A)=۰٫۷۵$$

در نتیجه

$$P(A|B)=\frac{(۰٫۹)(۰٫۷۵)}{(۰٫۹)(۰٫۷۵)+(۰٫۴)(۰٫۲۵)}=\frac{۲۷}{۳۱}$$

۱۰.۲ تابع مولد گشتاور

تابع مولد گشتاور یك متغیر تصادفی، بازای تمام مقادیر t بشرح زیر تعریف می‌شود:

$$M_X(t)=E[e^{tX}]$$
$$=\begin{cases}\sum_x e^{tx}P(x) & \text{اگر } X \text{ گسسته باشد،}\\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)\,dx & \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد،}\end{cases} \qquad (۶۳.۲)$$

مثال ۱۱.۲ فرض کنید که X متغیری تصادفی با توزیع پواسون و پارامتر λ است. تابع مولد گشتاور این متغیر تصادفی به شرح زیر بدست می‌آید:

$$M_X(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{tn}p(n)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{tn}e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^n}{n!}=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^n}{n!}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}$$
$$=e^{\lambda(e^t-1)}$$

(در رابطهٔ فوق، بسط سری $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}x^n/n!$، که در آن $x=\lambda e^t$ است، به کار گرفته شده است).

مثال ۱۲.۲ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی Y با توزیع نمایی و پارامتر λ عبارت است از:

$$M_Y(t)=\int_0^{\infty}e^{ty}f(y)\,dy=\int_0^{\infty}e^{ty}\lambda e^{-\lambda y}\,dy=\frac{\lambda}{\lambda-t}$$

رابطهٔ فوق فقط در مورد مقادیر $\lambda>t$ صادق است.

علت اصلی اینکه $M_X(t)$ را تابع مولد گشتاور می‌نامند، این است که با استفاده از آن می‌توان تمام گشتاورهای متغیر تصادفی را بدست آورد.

قضیه ۵.۲ گشتاور nام متغیر تصادفی X، یعنی $E(X^n)$، برابر با مشتق nام تابع مولد گشتاور آن متغیر تصادفی به‌ازای $t=0$ است.

$$\frac{d^nM_X(t)}{dt^n}\Big|_{t=0} = E(X^n) \quad , \quad n=1,2,\cdots \qquad (۶۴.۲)$$

اثبات: مشتقهای اول و دوم و ... n ام تابع مولد گشتاور عبارت‌اند از:

$$\frac{dM_X(t)}{dt} = \frac{dE(e^{tX})}{dt} = E\left(\frac{de^{tX}}{dt}\right) = E(Xe^{tX})$$

و

$$\frac{d^2M_X(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}[E(Xe^{tX})] = E\left[\frac{d}{dt}(Xe^{tX})\right] = E(X^2e^{tX})$$

و به‌همین ترتیب

$$\frac{d^nM_X(t)}{dt^n} = E(X^ne^{tX})$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در رابطه‌های فوق چنانچه مقدار $t=0$ در نظر گرفته شود، $E(X^n)$ به‌دست می‌آید.

مثال ۱۴.۲ گشتاورهـای اول و دوم یك متغیر تصادفی X بـا توزیع پواسون و پارامتر λ عبارت است از:

$$E(X) = \frac{dM_X(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \lambda e^t\cdot e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0} = \lambda$$

$$E(X^2) = e^{\lambda(e^t-1)}[(\lambda e^t)^2+\lambda e^t]\Big|_{t=0} = \lambda^2+\lambda$$

با استفاده از دو گشتاور اول، $var(x)$ را نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$var(X) = E(X^2)-[E(X)]^2 = \lambda$$

مثال ۱۵.۲ گشتاورهای اول و دوم یك متغیر تصادفی y با توزیع نمایی و پارامتر λ عبارت است از

$$E(Y) = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(Y^2) = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}\Big|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

با استفاده از دو گشتاور اول، $var(Y)$ را نیز می‌توان محاسبه کرد

$$var(Y) = E(Y^2)-[E(Y)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

یکی از عمده‌ترین کاربردهای تابع مولد گشتاور، به‌دست آوردن تابع توزیع مجموع دو متغیر تصادفی مستقل است، کـه از قضیهٔ زیر نتیجه‌گیری می‌شود. (تابع توزیع مجموع دو متغیر تصادفی مستقل X و Y را اصطلاحاً پیچش توابع توزیع X و Y می‌گویند).

قضیهٔ ۶.۲ تابع مولـد گشتاور مجموع دو متغیر تصادفی مستقل X و Y برابر بـا حاصل‌ضرب توابع مولد گشتاور در آنهاست، یعنی

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t) \qquad (۶۵.۲)$$

اثبات: براساس تعریف تابع مولد گشتاور و خاصیت مستقل‌بودن متغیرهای تصادفی X و Y داریم،

$$M_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX}\cdot e^{tY}] = E(e^{tX})E(e^{tY})$$
$$= M_X(t)\cdot M_Y(t)$$

۱۶

مثال ۱۵.۲ دو متغیر تصادفی مستقل X و Y را در نظر بگیرید. اگر این دو متغیر تصادفی دارای توزیع پواسون بـا پارامترهـای λ_1 و λ_2 باشند، تابع توزیع Z، کـه مجموع این دو متغیر تصادفی است، را به‌دست آورید.

حل: طبق مثال ۱۳.۲، تابع مولد گشتاور این دو متغیر تصادفی عبارت است از:

$$M_X(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)} \qquad (۶۶.۲)$$

و

$$M_Y(t) = e^{\lambda_2(e^t-1)} \qquad (۶۷.۲)$$

طبق قضیه ۶.۲ تابع مولد گشتاور Z از رابطه (۶۵.۲) به‌دست می‌آید.

$$M_Z(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)}\cdot e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$$

لذا نتیجه‌گیری می‌شود که، Z دارای توزیع پواسون با پارامتر $(\lambda_1+\lambda_2)$ است.

۱۱.۲ سریهای همگرا

در فصلهای بعـدی، بـه‌کرات بـا **سریهای همگرا** برخورد خـواهیم داشت. یك سری، مجموعه‌ای از اعداد به‌شکل a_1 و a_2 ... است، که آنها را جملات سری و a_n را جملهٔ عمومی آن می‌نامند. منظور از همگرا (یا متقارب) بودن یك سری آن است کـه مجموع

جملات آن عددی متناهی باشد. به‌زبان ریاضی، یك سری همگراست، اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

جملات یك سری می‌تواند مثبت یا منفی باشد، اما در نظریهٔ صف معمولا با جملات مثبت سروکار خواهیم داشت. بنابراین، در این مبحث فقط به‌این حالت خاص می‌پردازیم.

چند خاصیت اصلی سریهای همگرا عبارت است از:

الف ۱. در یك سری همگرا، جملهٔ عمومی nام به‌سمت صفر میل می کند، یعنی

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \qquad (۶۸.۲)$$

باید توجه داشت که این خاصیت، شرط کافی نیست و ممکن است در سریهای غیرهمگرا نیز وجود داشته باشد. لیکن، اگر حد نهایی جمله‌ای صفر نباشد، می‌توان استنتاج کرد که آن سری همگرا نیست.

صفر

۲. سری نمایی. اگر جملهٔ عمومی یك سری به شکل $a_n = x^n/n!$ و $x < 1$ باشد، مجموع جملات آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = e^x \qquad (۶۹.۲)$$

۳. اگر جملهٔ عمومی یك سری به‌شکل nx^{n-1} و $x < 1$ باشد، مجموع جملات آن به‌شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

اما، از رابطهٔ (۶۷.۲) نتیجه می‌شود، که:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

بنابراین،

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (۷۰.۲)$$

اگر محاسبهٔ مجموع تعدادی محدود از اعضای این سری مدنظر باشد، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{N} nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{N} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{N+1}}{1-x}\right)$$

یا

$$\sum_{n=0}^{N} nx^{n-1} = \frac{1-x^N-Nx^N+Nx^{N+1}}{(1-x)^2} = \frac{1-x^N}{(1-x)^2} - \frac{Nx^N}{1-x} \qquad (۷۱.۲)$$

ب. اگر حد خارج‌قسمت دوجملهٔ متوالی یك سری، یعنی $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ~~$(a_{n+1})/a_n$~~، همواره‌از عددی کوچکتر از واحد، مانند k کوچکتر باشد، آن سری همگراست.

ج. اگر حد جمله $(a_n)^{1/n}$ از عددی کوچکتر از واحد، مانند k، کوچکتر باشد، آن سری همگراست.

در این قسمت، چند نمونه سری همگرا با جملات مثبت راکه درنظریهٔ صف مورد، استفاده قرار می‌گیرد، بررسی می کنیم.

۱۲.۲ سری تصاعد هندسی

اگرمیان جملات یك سری، رابطهٔ زیر برقرار باشد، به‌آن سری تصاعد هندسی‌می‌گویند.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

یا

$$a_n = a_1 q^{n-1} \dots$$

q را قدر نسبت تصاعد می‌گویند اگر $q < 1$ باشد، مجموع جملات سری عبارت‌است‌از:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q} \qquad (۷۲.۲)$$

اگرمجموع تعدادی متناهی از جملات مدنظر باشد،

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{a_1 - a_{N+1}}{1-q} \qquad (۷۳.۲)$$

در رابطهٔ فوق، شرط $q < 1$ ضرورت ندارد.

۱۳.۲ تبدیل z

تبدیل z، که‌گاهی به‌آن **تابع مولّد** نیز می‌گویند، نقش وکاربردی شبیه تابع مولّد گشتاور دارد. این‌نوع تبدیل منحصراً برای متغیرهای تصادفی گسسته (و به‌طورعام توابع گسسته) به‌کار گرفته می‌شود.

متغیر تصادفی گسستهٔ x را در نظر بگیرید که فقط مقادیر عدد صحیح غیرمنفی را انتخاب می‌کند. چنانچه تابع احتمال این متغیر تصادفی به‌شرح زیر باشد،

$$p_i = P[X = i]$$

در این‌صورت، تبدیل z در مورد این متغیر تصادفی برحسب تعریف عبارت است از:

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i \qquad (۷۴.۲)$$

به‌شرط اینکه z طوری انتخاب شود که $p_i z^i$ سری همگرا باشد. برای نمونه اگر $|z| < 1$ باشد، این شرط همواره برقرار است.

مثال ۱۷.۲ اگر X دارای توزیع هندسی باشد، تبدیل z آنرا محاسبه کنید.

حل: تابع توزیع احتمال این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$p_i = p(1-p)^i \quad , \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

طبق تعریف $P(z)$ برای این متغیر تصادفی به‌شرح زیر است.

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} P(1-p)^i z^i = P \sum_{i=0}^{\infty} [(1-p)z]^i$$

با در نظر گرفتن مجموع سری هندسی، نتیجه می‌شود که

$$P(z) = \frac{p}{1 - qz} \qquad (۷۵.۲)$$

مثال ~~۱۷.۲~~ ۱۸-۲ تبدیل z یک متغیر تصادفی با توزیع دوجمله‌ای را محاسبه کنید.

حل: تابع توزیع این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$p_i = P(X = i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \quad , \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

و تبدیل z آن به‌شرح زیر محاسبه می‌شود.

$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (pz)^i q^{n-i}$$

(باید در نظر داشت که به‌ازای $i \geqslant n+1$ رابطه $p_i = 0$ برقرار است). با توجه به‌بسط سری دوجمله‌ای، نتیجه می‌شود که:

$$P(z) = (q + pz)^n \qquad (۷۶.۲)$$

تعیین p_i با استفاده از تبدیل z

رابطه بین p_i، $(i = 0, 1, \ldots n)$ و $P(z)$ رابطه‌ای منحصر به‌فرد است و با مشخص بودن هرکدام، امکان محاسبه دیگری وجود دارد.

قضیهٔ ۷.۲ چنانچه تبدیل z یک متغیر تصادفی $P(z)$ باشد، در این‌صورت تابع توزیع احتمال آن، متغیری تصادفی به‌شرح زیر خواهد بود:

$$p_0 = P(z)\big|_{z=0} \qquad (۷۷.۲)$$

$$p_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n P(z)}{dz^n}\bigg|_{z=0} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (۷۸.۲)$$

اثبات: با توجه به‌اینکه

$$P(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \cdots \qquad (۷۹.۲)$$

$$P'(z) = p_1 + 2p_2 z + 3p_3 z^2 \qquad (۸۰.۲)$$

$$P''(z) = 2p_2 + 3!\,p_3 z \qquad (۸۱.۲)$$

در روابط فوق، اگر $z = 0$ باشد، روابط (۷۷.۲) و (۷۸.۲) به‌ازای $n = 1, 2$ اثبات می‌شود. به‌همین ترتیب، رابطهٔ (۷۸.۲) به‌ازای مقادیر $n \geqslant 3$ نیز ثابت می‌شود.

مثال ۱۹.۲ اگر تبدیل z یک متغیر تصادفی $e^{-\lambda(1-z)}$ باشد، تابع توزیع احتمال مربوطه را تعیین کنید.

حل: طبق روابط (۷۷.۲) و (۷۸.۲) نتیجه می‌شود

$$p_0 = e^{-\lambda}$$

$$p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad , \quad n \geqslant 1$$

یعنی x دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است.

در این مثال، تابع توزیع احتمال فوق را از تعریف تبدیل z نیز می‌توان محاسبه کرد، زیرا با استفاده از بسط سری نمایی خواهیم داشت.

$$P(z) = e^{-\lambda(1-z)} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot z^n$$

در نتیجه $\quad P_n = e^{-\lambda} \lambda^n / n!$

بعضی از خواص تبدیل z را به‌شرح زیر می‌توان بیان کرد.

$$P(1) = 1 \qquad (۸۲.۲)$$

$$E(X)=P'(1) \qquad (۸۳.۲)$$

$$\text{var}(X)=P''(1)+P'(1)-[P'(1)]^2 \qquad (۸۴.۲)$$

به‌ازای $z=1$، از رابطه‌های (۷۸.۲) و (۷۹.۲) و (۸۰.۲) خواص فوق استنتاج می‌شود.

قضیهٔ ۸.۲ اگر X_1 و X_2، متغیرهای تصادفی مستقل، و $P_1(z)$ و $P_2(z)$، به‌ترتیب معرف تبدیل z آنها، و $X=X_1+X_2$ باشد، در این‌صورت تبدیل z متغیر تصادفی X، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$P(z)=P_1(z)P_2(z) \qquad (۸۵.۲)$$

اثبات: فرض کنید

$$q_i=P[X_2=i] \quad \text{و} \quad p_i=P[X_1=i]$$

بنابراین

$$P(X=n)=P(X_1+X_2=n)=\sum_{i=0}^{n}P(X_1=i)P(X_2=n-i)=\sum_{i=0}^{n}p_iq_{n-i}$$

در نتیجه

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X=n)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{i=0}^{n}p_iq_{n-i}=\sum_{i=0}^{\infty}p_iz^i\sum_{n=i}^{\infty}q_{n-i}z^{n-i}$$

$$=p_1(z)p_2(z)$$

قضیهٔ ۹.۲ اگر تبدیل z یک متغیر تصادفی مانند x برابر با $P(z)$ باشد، تبدیل z متغیر تصادفی bx برابر با $bp(z)$ است. (b عددی ثابت است).

کاربرد تبدیل z در حل معادلات تفاضلی

یکی از مهمترین کاربردهای تبدیل z، حل معادلات تفاضلی است، که در آنها توابعی وجود دارند که متغیرهایشان عدد صحیح هستند، برای نمونه

$$(\lambda+\mu)p_n=\mu_{n+1}+\lambda p_{n-1} \quad , \quad n=1,2,\dots$$

p_{n+1}

یا

$$f(n+2)-f(n+1)-f(n)=0 \quad , \quad n=0,1,2,\dots$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در اولین دستگاه معادلات، توابع مورد نظر p_n و در دومی $f(n)$ هستند. متغیرهای این‌توابع n است، که فقط مقادیر عدد صحیح را انتخاب می‌کند. (در

دستگاه معادلات اولی λ و μ پارامترهای ثابت هستند).

هدف از حل دستگاه معادلات تفاضلی، پیدا کردن مقادیر تابع به‌ازای متغیرهای مختلف، یعنی $p_1, p_2, \dots$ است، به‌طوری که در دستگاه معادلات صدق کند. کاربرد حل معادلات تفاضلی در مثالهای زیر نشان داده می‌شود.

مثال ۱۰.۲ معادلات تفاضلی زیر را با استفاده از تبدیل z حل کنید:

$$p_{n+1}-(1+a)p_n+ap_{n-1}=0 \quad , \quad n=1,2,\dots \qquad (۸۶.۲)$$

و

$$p_1-ap_0=0$$

فرض براین‌است‌که p_n معرف تابع احتمال یک متغیر تصادفی است.

حل: تبدیل z توابع p_n را به‌شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nz^n$$

ضمناً عبارات معادلهٔ (۸۶.۲) را در z^n ضرب و همه را باهم جمع می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{n+1}z^n-(1+a)\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n+a\sum_{n=1}^{\infty}p_{n-1}z^n=0 \qquad (۸۷.۲)$$

طبق تعریف مربوط به $P(z)$ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{n+1}z^n=\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}p_{n+1}z^{n+1}=\frac{1}{z}[P(z)-p_0-p_1z]$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n=P(z)-p_0$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{n-1}z^n=z\sum_{n=1}^{\infty}p_{n-1}z^{n-1}=zP(z)$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_ip_{n-i}z^n=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_iz^i\sum_{n=i}^{\infty}p_{n-i}z^{n-i}=L(z)P(z)$$

متن صفحه ... برای قسمت ... شود

پس‌از جایگزینی روابط فوق در رابطهٔ ۷۹.۲ نتیجه می‌شود که

$$P(z)=\frac{\mu p_0(1-z)}{\mu(1-z)-z[\lambda-L(z)]}$$

با استفاده از رابطهٔ فوق مقادیر p_n محاسبه می‌شود.

مسائل

۱. در ظرفی سه توپ، یك توپ سفید، یك توپ سیاه و یك توپ قرمز وجود دارد. یك توپ به‌طور تصادفی از آن برمی‌داریم. آن‌گاه این توپ را مجدداً به‌ظرف برمی‌گردانیم و توپی دیگر را از آن برمی‌داریم. فضای نمونهٔ این آزمایش چیست؟ احتمال اینکه هر دو توپ سفید باشند، چیست؟ احتمال اینکه یك توپ سیاه و یك توپ سفید باشد،چیست؟

۲. مسئلهٔ ۱ را مجدداً حل کنید، با این تفاوت که توپ برداشته شده از ظرف مجدداً برگردانیده نشود.

۳. مسئلهٔ ۱ را مجدداً حل کنید، با این تفاوت که در ظرف چهار توپ، دو توپ سفید،یك توپ سیاه، و یك توپ قرمز، وجود داشته باشد.

۴. به‌جای استفاده از فضای نمونه، با استفاده از متغیر تصادفی مناسب، مسئلهٔ ۳ را مجدداً حل کنید.

۵. متغیر تصادفی X، فقط مقادیر عدد صحیح غیرمنفی را انتخاب می‌کند، نشان دهید که

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geqslant n)=\sum_{m=0}^{\infty}P(X>m)$$

۶. در ظرفی n توپ وجود دارد، که با شماره‌های ۱ و ۲ و ... و n مشخص شده‌اند.یك توپ را به‌طور تصادفی انتخاب و پس‌از یادداشت کردن شمارهٔ آن، به‌ظرف برمی‌گردانیم. این‌کار را ادامه می‌دهیم، تا اینکه توپی برای دومین بار برداشته شود، که در این‌صورت متوقف می‌شویم. چنانچه X را تعداد دفعات آزمایش فرض کنیم، نشان دهید که $P(k)=P(X=k)$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$P(k)=(k-1)!\binom{n}{k-1}\frac{k-1}{n^k}\quad,\quad k=2,3,\dots,n+1$$

آن‌گاه با استفاده از روش و نتیجهٔ مسئلهٔ ۵، تابع توزیع X را تعیین‌کنید. ضمناً نشان دهیدکه میانگین X از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$E(X)=2+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

۷. شخصی در آزمونی شرکت و یکی از نمرات الف، ب، ج، د و هـ را دریافت می‌کند. چنانچه نمرهٔ الف بگیرد، برنده اعلام می‌شود و دیگر در این آزمون شرکت نمی‌کند. چنانچه نمرهٔ او هـ باشد هم، حق شرکت مجدد در آزمون را ندارد. درغیر این دوحالت، آن‌قدر در آزمون شرکت می‌کند تا یکی از دو نمرهٔ فوق را دریافت کند. فرض کنید که نتیجهٔ آزمونها مستقل از یکدیگر و احتمال گرفتن نمره‌های الف، ب، ج، د و هـ به‌ترتیب P_1، P_2، P_3، P_4، P_5 باشد. فضای نمونهٔ این مسئله را بنویسید. نشان دهید که احتمال توقف شرکت در آزمون به‌علت گرفتن نمرهٔ الف، برابر با نتیجهٔ رابطهٔ زیر است:

$$\frac{P_1}{P_1+P_5}$$

۸. تاسی را دوبار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه تاس اول ۵ باشد، چقدر است، مشروط براینکه بدانیم مجموع دو تاس برابر با ۸ بوده است؟

۹. احتمال اینکه در یك روز K مشتری به سیستمی مراجعه‌کنند را P_k فرض می‌کنیم. احتمال اینکه در دو روز جمعاً ۱۵ مشتری به‌این سیستم مراجعه کنند، چقدر است؟ فرض کنیدکه تعداد مشتریهایی‌که در روزهای مختلف مراجعه می‌کنند مستقل از یکدیگر است.

۱۰. با فقط یکی‌از nکلید موجود، می‌توانیم دری را باز کنیم. در دوحالت زیر، احتمال اینکه در دفعهٔ iام بتوان در را بازکرد، چقدر است؟ میانگین و واریانس تعداد کلیدهای امتحان شده را در هر دو حالت زیر حساب‌کنید.

الف. کلیدهایی‌که در را باز نمی‌کنند، کنار گذاشته شوند.

ب. کلیدهایی‌که در را باز نمی‌کنند، کنار گذاشته نشوند.

۱۱. از ۱۵ عدد توپ موجود، نه عدد آن نو است. دربازی اول سه توپ به‌طورتصادفی انتخاب می‌کنیم. پس‌از بازی، آنها را برگشت می‌دهیم. در بازی دوم سه توپ دیگررا، بازهم به‌طورتصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه هرسه توپ نو باشند، چیست؟ (فرض می‌شودکه توپهای مصرف شده در بازی اول دیگر نو محسوب نمی‌شوند).

۱۲. در ظرفی ۵ توپ‌سفید و ۷ توپ‌سیاه و درظرف دیگر، سه توپ‌سفید و ۱۲ توپ‌سیاه وجود دارد. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر نتیجه شیر باشد، از ظرف شمارهٔ ۱و اگر خط باشد از ظرف شمارهٔ ۲، توپی برمی‌داریم. اگر توپی که برداشته‌ایم سفید باشد، به‌چه احتمالی نتیجهٔ پرتاب سکه شیر بوده است؟

۱۳. در مثال ۲.۴، آیا دو متغیر تصادفی X و Y مستقل‌اند؟ چرا؟

۱۴. شش دانشجوی دانشکدهٔ «الف» و شش دانشجوی دانشکدهٔ «ب»، در یك آزمایشگاه ثبت‌نام کرده‌اند. برای آزمایش، آنها را به‌طور تصادفی به دو گروه تقسیم کرده‌اند. احتمال اینکه در گروه اول nنفر دانشجوی دانشکدهٔ «الف» جای‌گرفته باشند، چقدراست؟

۱۵. یك متغیر تصادفی در فاصلهٔ (۱، ۱ −) دارای تابع چگالی $C(1-X^2)$ است. مقدار C را تعیین کنید. تابع توزیع این متغیر تصادفی را محاسبه کنید. احتمال اینکه X بین صفر تا ۰٫۷۵ باشد، چقدر است؟

۱۶. متغیرهای تصادفی مستقل $x_1, x_2, \cdots, x_n$ را درنظر بگیرید، که دارای تابع توزیع یکنواخت در فاصلهٔ (۱ و ۰) هستند. متغیر تصادفی جدید M را به‌شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$M = \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

نشان دهید که تابع توزیع M عبارت خواهد بود از:

$$F_M(x) = x^n, \quad \text{مشروط براینکه} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

تابع چگالی این متغیر تصادفی را به‌دست آورید.

۱۷. متغیری تصادفی، مقادیر ۱ و ۲ و ۳ را با احتمال مساوی انتخاب می‌کند. با استفاده از تابع مولد گشتاور این متغیر تصادفی، مقدار $E(x)$ و $E(x^2)$ را به دست آورید و نتایج به‌دست آمده را با محاسبهٔ مستقیم این گشتاورها مقایسه کنید.

۱۸. دو متغیر تصادفی مستقل X و Y را در نظر بگیرید. فرض کنید که X دارای توزیع نمایی و Y دارای تابع توزیع دلخواه G باشد. مقدار رابطهٔ زیر را حساب کنید:

$$P(X<Y)$$

۱۹. فرض کنید که X معرف تعداد پرتابهای تاس تا آمدن اولین عدد ۶ و Y معرف تعداد پرتابها تا آمدن اولین عدد ۱ باشد. کمیتهای زیر را حساب کنید

$$E(X|Y=2), \quad E(X|Y=1), \quad E(X)$$

۲۰. فرض کنید که $X_1, X_2, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل وهمه دارای تابع توزیع یکسان هستند. از طرف دیگر N نیز متغیر تصادفی است. ثابت کنید که

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X]$$

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\operatorname{var}(X) + (E(X))^2 \operatorname{var}(N)$$

۲۱. متغیر تصادفی X را در نظر بگیرید که دارای تابع پواسون با پارامتر Y است. اگر Y نیز یك متغیر تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر m باشد، در این‌صورت تابع توزیع X را به‌دست آورید.

۲۲. چگالی مشترك X و Y عبارت است از:

$$f(x,y) = \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, \quad 0<x<\infty, \quad 0<y<\infty$$

مقدار $E(X|Y=y)$ را بدست آورید.

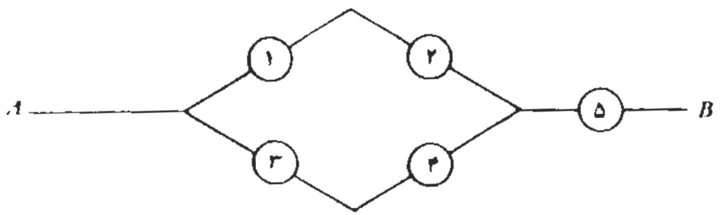
۲۳. اگر X یك متغیر تصادفی با توزیع نمایی باشد، $E(X|X>1)$ را محاسبه کنید.

۲۴. در دو کفه ترازو، دو وزنه می‌گذاریم، که هر کدام از آنها متغیری تصادفی است. اولی دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۰ و واریانس ۱ و دومی دارای توزیع یکنواخت در فاصلهٔ (۵۰، ۰) است. احتمال اینکه وزنهٔ اولی سنگین‌تر باشد، چقدر است؟

۲۵. احتمال اینکه در یك تیراندازی تیر به‌هدف بخورد برابر با ($3000\, D^{-2}$) است، که D فاصلهٔ تیرانداز تا هدف فرض می‌شود. چنانچه هدف متحرك و فاصلهٔ آن نیز متغیری تصادفی با توزیع یکنواخت از فاصلهٔ ۱۰۰ تا ۲۰۰ باشد، در این‌صورت احتمال برخورد تیر به هدف را بدست آورید.

۲۶. در یك ظرف ۶ توپ سفید و ۴ توپ سیاه وجود دارد. عدد n را به‌طور تصادفی از بین اعداد (۱،۲،۳،۴،۵،۶) انتخاب می‌کنیم. آن‌گاه n عدد توپ از ظرف برمی‌داریم. احتمال اینکه همهٔ توپها سفید باشد، چیست؟

۲۷. یك مدار برقی در شکل نشان داده شده است. در طول یك آزمایش، جزء شمارهٔ i به‌احتمال P_i ($i = 1, 2, \cdots, 5$) از کار می‌افتد وعبور جریان از آن امکان‌ندارد. احتمال اینکه در انتهای آزمایش جریان از A به B عبور کند، چقدر است؟



۲۸. در کارخانه‌ای یك نمونهٔ سه‌تایی از کالایی برای بازرسی انتخاب شده است. اگر در این کارخانه ۵ خط تولید مشابه وجود داشته باشد، احتمال اینکه این کالاها از خطوط مختلف انتخاب‌شده باشد، چقدر است؟ (یا به‌عبارت دیگر احتمال اینکه دو عدد یا بیشتر کالا روی یك خط تولید ساخته‌شده باشد، چقدر است؟

۲۹. در مورد هر تبدیل z به‌شرح زیر، تابع f_n مربوطه را تعیین کنید. (f_n لزوماً تابع احتمال نیست)

الف. $$P(z) = \frac{10}{1-z}$$

ب. $P(z)=\frac{8}{1-5z}$

ج. $P(z)=\frac{8z}{(1-5z)^2}$

د. $P(z)=3e^{z}$

۳۰. تابع f_n مربوط به‌تبدیل z به‌شرح زیر را تعیین کنید.

$$P(z)=\frac{1+12z}{1+z-6z^2}$$

راهنمایی: $P(z)$ را به‌مجموع دو کسر تبدیل کنید که مخرج آنها درجه یك و صورت آنها فاقد متغیر z باشد.

۳۱. معادلهٔ تفاضلی زیر را حل کنید.

$$p_{n+2}-5p_{n+1}+6p_n=0$$

که $p_0=0$ و $p_1=1$ است.

۳

توزیع نمایی[1] و فرایند پواسون

در نظریهٔ صف، **توزیع نمایی**، **فرایند پواسون** و **توزیع ارلانگی** نقش اساسی دارند. مدلهایی که زمان بین دو ورود متوالی مشتریها و یا مدت خدمت‌دهی آنها متغیری تصادفی با توزیع نمایی است، ساده‌ترین حالتها محسوب می‌شوند. در بسیاری از موارد نیز متغیرهای تصادفی فوق را می‌توان، با تقریب کافی، دارای توزیع نمایی فرض کرد. ضمناً خواهیم دید که توزیع نمایی و فرایند پواسون با یکدیگر رابطهٔ نزدیك دارند و در واقع به‌یك پدیدهٔ واحد از دو دید مختلف می‌نگرند.

در فصول بعد، مدلهای صفی را که براساس فرایند پواسون ساخته شده‌اند، مورد بررسی قرار می‌دهیم

۱.۳ توزیع نمایی

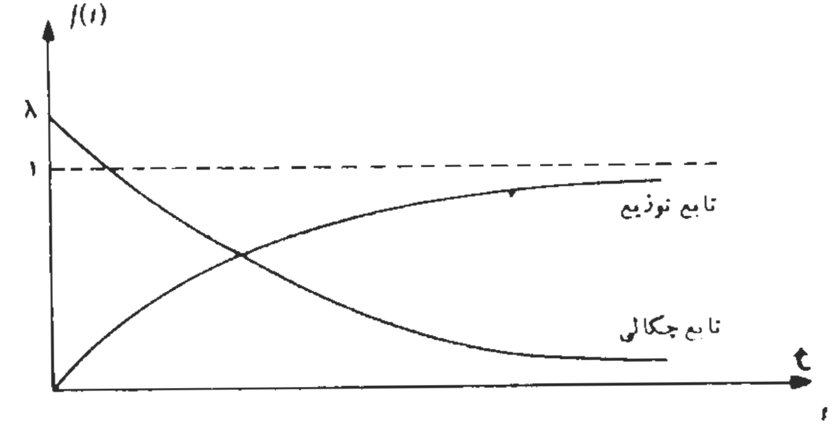
تعریف. متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی است. اگر، به‌ازای تمام‌مقادیر $x \geqslant 0$، تابع چگالی آن به‌شکل زیر باشد (λ پارامتر مدل نامیده می‌شود).

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \qquad (1.3)$$

تابع توزیع این متغیر تصادفی را (به‌ازای $x \geqslant 0$) به‌شرح زیر محاسبه می‌کنند.

---

۱. در بعضی از کتب و مقالات به‌این متغیر تصادفی، نمایی منفی هم می‌گویند.



شکل ۱.۳ تابع چگالی و تابع توزیع نمایی

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{0}^{x} f(y)\,dy=1-e^{-\lambda x} \qquad (۲.۳)$$

به‌همین ترتیب،

$$P(X>x)=e^{-\lambda x} \qquad (۳.۳)$$

محاسبهٔ میانگین و واریانس توزیع نمایی

میانگین این متغیر تصادفی به‌شرح زیر محاسبه‌می‌شود:

$$E(X)=\int_{0}^{\infty}(x)(\lambda e^{-\lambda x})dx=\frac{1}{\lambda} \qquad (۴.۳)$$

واریانس را می‌توان از تابع مولّد گشتاور به‌دست آورد، که عبارت است‌از:

$$M_{1}(t)=E(e^{tx})=\int_{0}^{\infty}(e^{tx})\,(\lambda e^{-\lambda x})dx=\frac{\lambda}{\lambda-t}\ ,\ (t<\lambda \text{ با فرض}) \qquad (۵.۳)$$

با مشتقگیری از این‌تابع، می‌توان گشتاورهای مختلف و از جمله $E(X^2)$ را حساب کرد.

$$E(X^2)=\frac{d^2M(t)}{dt^2}\bigg|_{t=0}=\frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}\bigg|_{t=0}=\frac{2}{\lambda^2} \qquad (۶.۳)$$

و

$$\operatorname{var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2} \qquad (۷.۳)$$

(میانگین این متغیر تصادفی را نیز می‌توان با مشتقگیری از تابع مولد گشتاور به دست آورد، که همان $1/\lambda$ حاصل می‌شود).

۲.۳ خواص توزیع نمایی

الف. خاصیت بدون حافظه بودن

مهمترین خاصیت توزیع نمایی این‌است که گذشتهٔ آن نقشی در آینده‌اش ندارد. فرض کنید که زمان وقوع یك اتفاق، متغیری تصادفی با توزیع نمایی باشد. اگر تا لحظهٔ معینی، مثلا s، این اتفاق نیفتاده باشد، می‌توان از این مدت زمان صرف‌نظر کرد و مبدأ زمان را به‌این لحظه (لحظهٔ s به‌جای صفر) انتقال داد.

مثلا، اگر خراب شدن ماشینی دارای توزیع نمایی باشد و پس‌از مدتی، مثلا سه سال، ماشین مزبور هنوز خراب نشده باشد، خاصیت بدون حافظه بودن آن حکم می‌کند که سه سال گذشته را باید فراموش کرد و زمان حال را مبنای محاسبات در نظر گرفت. بدین ترتیب، احتمال خراب شدن این ماشین کهنه با احتمال خراب شدن ماشین نو معادل آن یکسان است. برای بیان این موضوع به‌زبان ریاضی، فرض کنید که X، متغیر تصادفی با توزیع نمایی باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که به‌ازای تمام مقادیر X و s رابطهٔ زیر صادق است

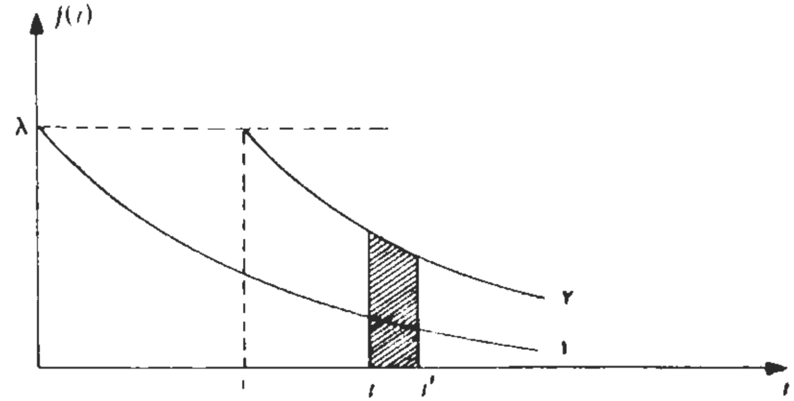
$$P[X>s+x|X>s]=P[X>x] \qquad (۸.۳)$$

هر دو طرف رابطهٔ فوق، احتمال خراب‌نشدن ماشین را، حداقل تا لحظهٔ x (نسبت‌به‌زمان فعلی) نشان می‌دهند. طرف سمت راست، مربوط به ماشین نو است، درحالی‌که عبارت سمت چپ به‌ماشینی مربوط است که تا این لحظه عمری به‌اندازهٔ s داشته است. برای اثبات رابطهٔ ۸.۳، از خاصیت احتمال شرطی استفاده می‌شود، یعنی

$$P(X>s+x|X>s)=\frac{P(X>s+x,\ X>s)}{P(X>s)}$$

$$=\frac{P(X>s+x)}{P(X>s)}=\frac{e^{-\lambda(s+x)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda x}=P(X>x)$$

این پدیده را می‌توان با کمك منحنیهای شکل ۲.۳ نیز نشان داد. فرض کنید که منحنی شمارهٔ ۱ نشاندهندهٔ تابع چگالی متغیری تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر λ است. می‌خواهیم حساب کنیم با چه‌احتمالی ماشین درفاصلهٔ t تا t' خراب می‌شود. اگر در لحظهٔ صفر باشیم، این‌احتمال برابر بامساحت زیرمنحنی درهمین فاصله است. اما اگر در لحظهٔ s باشیم وماشین‌هنوز خراب‌نشده باشد، این احتمال برابر با مساحت زیرمنحنی شمارهٔ (۲) درهمین‌فاصله‌است، زیرا به‌علت‌خاصیت بدون حافظه‌بودن توزیع‌نمایی، مبدأ زمان به‌لحظهٔ



شکل ۲.۳ خاصیت بدون حافظه بودن توزیع نمایی

و انتقال می‌یابد. به‌طوری‌که مشاهده می‌شود، دراین حالت مقدار احتمال بیشتر از حالت قبلی است.

مثال ۱.۳ فرض‌کنید که مدت مکالمات تلفنی، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۵ دقیقه است. شخصی به‌یک تلفن عمومی مراجعه و مشاهده می‌کند که شخص دیگری در حال مکالمه است، اما معلوم نیست که مکالمه‌اش از چه زمانی شروع شده‌است؟ احتمال اینکه این شخص مجبور شود بیش‌از یک ساعت منتظر آزاد شدن تلفن بماند، چقدر است؟

حل: چون متغیر تصادفی نمایی بدون حافظه است، می‌توان فرض‌کرد که مکالمه از همان لحظه آغاز شده است. از طرف دیگر، چون میانگین مکالمه ۵ دقیقه است، پارامتر λ برابر با ۱/۵ خواهد بود. اگر مدت زمان مکالمهٔ تلفن‌کننده را X فرض‌کنیم،

$$P(X>60)=e^{-60(1/5)}=e^{-12}$$

قضیهٔ ۱.۳ تنها متغیر تصادفی پیوسته بدون حافظه، نمایی است

اثبات: متغیر تصادفی X، که بدون حافظه است، را درنظر بگیرید. طبق این خاصیت، رابطهٔ (۸.۳) به‌ازای تمام مقادیر t و s برقرار است. از طرفی، براساس احتمال شرطی، داریم.

$$P(X>t+s\,|\,X>s)=\frac{P(X>t+s,\ X>s)}{P(X>s)}=\frac{P(X>t+s)}{P(X>s)} \qquad (۹.۳)$$

بااستفاده از رابطه‌های (۸.۳) و (۹.۳)، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$P(X>t+s)=P(X>s)P(X>t) \qquad (۱۰.۳)$$

نسبت به s مشتق می‌گیریم.

$$\frac{d}{ds}P(X>t+s)=P(X>t)\frac{d}{ds}P(X>s) \qquad (۱۱.۳)$$

از طرف دیگر، با توجه به‌این موضوع که تابع چگالی مشتق تابع توزیع است، رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{ds}P(X>s)=\frac{d}{ds}[1-P(X\leqslant s)]=-\frac{d}{ds}P(X\leqslant s)=-f(s) \qquad (۱۲.۳)$$

که $f(s)$ تابع چگالی متغیر تصادفی X به‌ازای مقدار s است. از رابطه‌های (۱۱.۳) و (۱۲.۳) نتیجه‌گیری می‌شود که

$$\frac{d}{ds}P(X>s+t)=-f(s)P(X>t)$$

ابتدا طرفین را بر $P(X>t)$ تقسیم می‌کنیم. از طرفی، چون نتایج فوق به‌ازای تمام مقادیر s صادق است، آن‌را به‌طور دلخواه مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{dP(X>t)}{P(X>t)}=-f(0)ds \qquad (۱۳.۳)$$

از طرفین انتگرال معین (از صفر تا t) گرفته می‌شود، که حاصل آن عبارت است‌از:

$$Ln[P(X>t)]=-f(0)\cdot t$$

یا

$$P(X>t)=e^{-f(0)t} \qquad (۱۴.۳)$$

رابطهٔ (۱۴.۳) نشان می‌دهد که X دارای توزیع نمایی با پارامتر $f(0)$ است.

در نظریهٔ صف، استفاده از خاصیت بدون حافظه بودن، محاسبات را بسیار آسانتر می‌کند، زیرا می‌توان با صرف‌نظرکردن از اتفاقات گذشته، هر زمانی را به عنوان مبدأ محاسبات در نظر گرفت. اگر زمان بین دو ورود متوالی مشتریها، دارای توزیع نمایی باشد، اطلاع از زمان ورود مشتریهای قبلی ضرورتی ندارد.

مثال ۲.۳ فرض کنید که مدت زمانی که یک مشتری در داخل سیستم می‌گذراند، متغیر تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۴۰ دقیقه باشد. احتمال اینکه یک مشتری حداقل یک ساعت در سیستم باشد، چقدر است؟ احتمال اینکه یک مشتری حداقل یک ساعت در سیستم باشد، درحالی که می‌دانیم تا این لحظه حداقل نیم‌ساعت را در سیستم گذرانده، چقدر است؟

حل: متغیر تصادفی X را مدت‌زمان توقف مشتری درسیستم فرض می‌کنیم. می‌دانیم

که میانگین توقف مشتری ۴۰ دقیقه (یا دو سوم ساعت) است. بنابراین، $\lambda = 1.5$ به این ترتیب، جواب اولین سؤال عبارت است از:

$$P(X>1)=e^{-\lambda}=e^{-1.5}$$

اما در مورد دومین سؤال، با درنظر گرفتن خاصیت بدون حافظه بودن این متغیر تصادفی،

$$P(X>1 \mid X>0.5)=P(X>0.5)=e^{-(1.5)(0.5)}=e^{-0.75}$$

ب. حداقل چند متغیر تصادفی مستقل با توزیع نمایی، یک متغیر تصادفی با توزیع نمایی است

برای تشریح این خاصیت، سیستم صفی را با n خدمت‌دهنده درنظر بگیرید. فرض کنید در زمانی که یک مشتری جدید وارد سیستم می‌شود، همهٔ خدمت‌دهندگان مشغول هستند. درضمن، صفی هم تشکیل نشده است. در این‌صورت، مدت زمانی که مشتری باید در صف منتظر بماند، عبارت‌است از فاصلهٔ زمانی ورود او تا لحظه‌ای که حداقل یکی از خدمت‌دهندگان آزاد می‌شود. به عبارت دیگر، مدت انتظار او، که البته متغیر تصادفی است، حداقل چند متغیر تصادفی دیگر (مدت خدمت‌دهی خدمت‌دهندگان) است. می‌خواهیم نشان دهیم که اگر این متغیرهای تصادفی دارای توزیع نمایی باشند، حداقل آنها نیز دارای توزیع نمایی خواهد بود. پارامتر این توزیع نمایی نیز مجموع پارامترهای متغیرهای تصادفی تشکیل‌دهندهٔ آن است.

به بیان ریاضی: اگر X_1، X_2، ...، X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمایی و پارامترهای $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ و همچنین $X=\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ باشد،

$$P(X>x)=P(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}>x)$$

از طرف دیگر، اگر حداقل چند متغیر تصادفی، از عددی مانند x کوچکتر نباشد، بدیهی است که هر کدام از این متغیرهای تصادفی نیز از این عدد کوچکتر نخواهد بود. بنابراین،

$$P(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}>x)=P(X_1>x, X_2>x, \ldots, X_n>x)$$

و چون فرض شده است که متغیرهای تصادفی موردبحث مستقل‌اند،

$$P(X>x)=P(X_1>x)P(X_2>x)\cdots P(X_n>x)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)x}$$

این خاصیت را می‌توان در مورد الگوی ورود مشتریان نیز در نظر گرفت. فرض کنید که سیستم دارای n نوع مشتری و زمان بین دو ورود متوالی هر نوع مشتری نیز متغیر تصادفی با توزیع نمایی باشد. در این‌صورت، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها (صرف‌نظر از نوع مشتری)، برابر با حداقل زمانهای بین دو ورود مشتریهای مختلف

خواهد بود، که طبق خاصیت فوق‌متغیر تصادفی با توزیع نمایی است.

مثال ۳.۳ سیستم صفی را در نظر بگیرید که دو خدمت دهنده داشته باشد. مدت زمان خدمت، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. میانگین خدمت توسط خدمت‌دهندهٔ اولی را ۱۰ دقیقه و توسط دومی را ۱۵ دقیقه فرض می‌کنیم. یک مشتری جدید وارد سیستم می‌شود. در زمان ورود او هردو خدمت‌دهنده مشغول بوده‌اند و در صف نیز مشتری دیگری وجود ندارد. چنانچه در لحظهٔ ورود این مشتری جدید، ۱۲ دقیقه از زمان ارائهٔ خدمت توسط خدمت‌دهندهٔ شمارهٔ ۱ و ۸ دقیقه ازخدمت شمارهٔ ۲ گذشته‌باشد، به‌سؤالات زیر جواب دهید؟

الف. احتمال اینکه مشتری جدید حداکثر ۳ دقیقه در صف منتظر بماند، چقدر است؟

$\frac{1}{15}$

ب. میانگین مدت زمان انتظار مشتری در صف را حساب کنید.

حل: براساس میانگین مدت زمان خدمت، پارامترهای متغیر تصادفی نمایی برای خدمت‌دهندهٔ اول برابر با ۱/۱۰ و برای دومی برابر با ۱/۱۵ خواهد بود. با استفاده از خاصیت الف، (بدون حافظه بودن توزیع نمایی)، می‌توانیم فرض کنیم که خدمت‌دهندگان از لحظهٔ ورود مشتری‌جدیدکار خود را شروع کرده‌اند. بنابراین، مبدأ زمان‌را همین لحظه در نظر می‌گیریم. اما، مدت زمانی که مشتری جدید درصف صرف می‌کند، متغیر تصادفی X برابر با حداقل مدت زمان ارائهٔ خدمت توسط خدمت‌دهندگان ۱ و ۲ است. اما متغیر تصادفی X، طبق خاصیت ب، دارای توزیع نمایی با پارامتر مجموع پارامترها، یعنی ۱/۶ است، پس،

$e^{-(\frac{1}{6})3}$

$$P(X\le 3)=1-e^{-(1/6)(3)}=1-e^{-0.5}$$

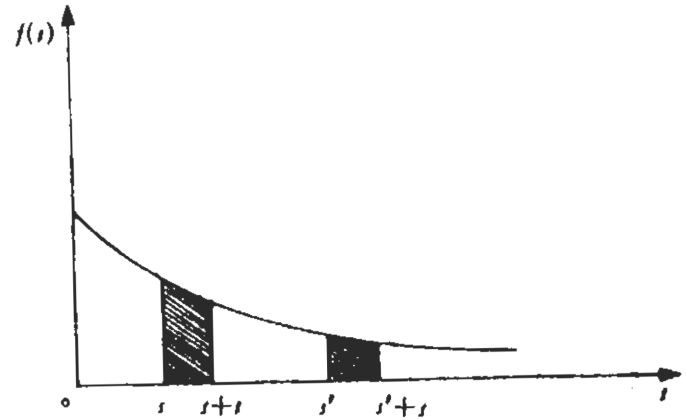
$$E(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}=6 \quad \text{دقیقه}$$

بنابراین، مشتری باید ۶ دقیقه در صف منتظر بماند. درحالی که اگر در سیستم فقط خدمت‌دهندهٔ اول کار می‌کرد، می‌بایست ۱۰ دقیقه صبر می‌کرد. (و اگر فقط خدمت‌دهندهٔ دوم کار می‌کرد، به ۱۵ دقیقه وقت نیاز بود).

ج. نزولی بودن تابع چگالی

این خاصیت از روی منحنی به‌وضوح مشخص است. برای روشن شدن این خاصیت، دو زمان s و s' را در نظر بگیرید (که $s'>s$). احتمال وقوع یک پیشامد، در فاصلهٔ $(s, s+t)$ از احتمال وقوع همان پیشامد در فاصلهٔ $(s', s'+t)$ بیشتر است (در هر دو حالت t یکسان فرض می‌شود). این موضوع در شکل ۳.۳ نشان داده شده است.

مثال عددی زیر به‌روشن شدن موضوع کمک می‌کند. محاسبات، مربوط به‌توزیع نمایی با میانگین یک است



شکل ۳.۳ نزولی بودن تابع چگالی متغیر تصادفی نمایی

$$P\left(۰ \leqslant X \leqslant \frac{۱}{۲}\right) = ۰٫۳۹۳$$

$$P\left(\frac{۱}{۲} \leqslant X \leqslant ۱\right) = ۰٫۲۳۸$$

$$P\left(۱ \leqslant X \leqslant \frac{۳}{۲}\right) = ۰٫۱۴۵$$

$$P\left(\frac{۳}{۲} \leqslant X \leqslant ۲\right) = ۰٫۰۸۸$$

$$P(۲ \leqslant X \leqslant ۲٫۵) = ۰٫۰۵۳$$

براساس محاسبات فوق، یك متغیر تصادفی با توزیع نمایی مقادیر کوچك را با احتمال زیاد و مقادیر بزرگتر را بـا احتمال کمتر انتخاب می‌کند. در ایـن مثال، احتمال انتخاب مقادیر کوچکتر از مقدار میانگین، بیش‌از ۶۳۱ر۰ است، درحالی که احتمال انتخاب مقادیر بیش‌از آن کمتر از ۳۶۹ر۰ خواهد بود.

از این خاصیت بدین ترتیب استفاده می‌کنند که درصورتی می‌توان گفت کـه مدت خدمت‌دهی دارای توزیع نمایی است کـه احتمال طولانی بودن مدت خدمت کم باشد و درعوض بیشتر خدمتها درمدتی کوتاه (در مقایسه با میانگین) به‌اتمام برسد. به‌این‌ترتیب، اگـر در سیستمی، مدت خدمت‌دهی ثابت و یـا تقریباً ثابت بـاشد، نمی‌توان گفت کـه خدمت‌دهی با توزیع نمایی انجام می‌شود.

یکی دیگر از مواردی که می‌توان مدت خدمت‌دهی را، طبق این خاصیت، متغیری

تصادفی با توزیع نمایی دانست، به شرح زیراست:

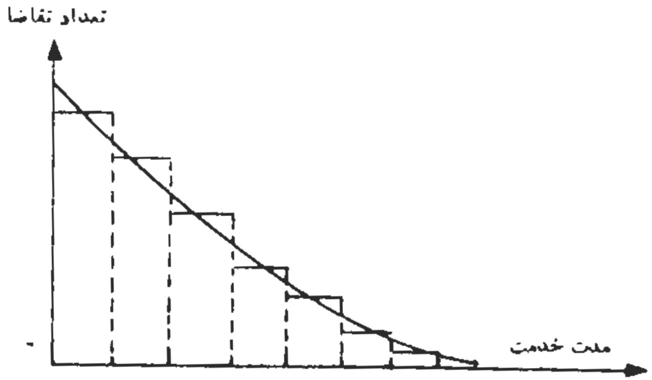
سیستمی را در نظر بگیرید که دارای انواع مختلف مشتری (مثلا m نوع) باشد. با مراجعه به‌شکل ۴.۳، فرض کنید کـه تعداد مشتریهای نوع ۱ زیاد ولـی مدت خدمت‌دهی به‌آنان کوتاه (وتقریباً ثابت)؛ تعداد مشتریهای نوع ۲ تا حدی کمتر ولی مدت‌خدمت‌دهی به‌آنان بیشتر، و همین‌طور تا مشتریان نوع mام که تعدادشان خیلی کم و مدت‌ارائهٔ‌خدمت به‌آنان طولانی است. دراین‌صورت، منحنی حاصل معرف مقدار تقاضا ومدت خدمت‌دهی خواهد بود، که با تقریب کافی، نشاندهندهٔ متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. مثلاً، بیمارستانی را در نظر بگیرید. معمولاً، تقاضا برای خدمات کوتاه مدت مانند تزریقات و پانسمان زیاد، ولی برای خدمات طولانی مانند جراحی توأم با بستری شدن کمتر است.

یك مکالمهٔ تلفنی را در نظر بگیرید. درصدی بالا از مکالمات کوتاه و درصد کمی از آنها طولانی هستند. درنتیجه، رابطهٔ بین تعداد و مدت خدمت معمولا با الگوی شکل ۴.۳ تطابق دارد و لذا می‌توان گفت که مدت زمان مکالمه، متغیر تصادفی نمایی است.

ه. در توزیع نمایی، احتمال وقوع پیشامد در زمان کوتاه Δt تقریباً برابر با $\lambda\Delta t$ است

یعنی چنانچه تـا لحظهٔ مشخصی پیشامد مورد نظر بـه‌وقوع نپیوسته باشد، احتمال اتفاق افتادن آن در فاصلهٔ کوتاه Δt متناسب با λ است. به‌زبان ریاضی

$$\lim_{\Delta t \to ۰} \frac{P(X \leqslant x+\Delta t \mid X > x)}{\Delta t} = \lambda \qquad (۱۵.۳)$$



شکل ۴.۳ حالتی که انواع مختلف مشتری با زمانهای مختلف خدمت‌دهی وجود دارد

$\lambda\Delta t$

این خاصیت را به‌شرح زیر می‌توان اثبات کرد.

$$P(X \leqslant x+\Delta t \mid X > x) = P(X \leqslant \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t}$$
$$= 1 - \left[1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \cdots\right] = \lambda \Delta t + O(\Delta t)$$

(در عبارت فوق، ابتدا از خاصیت بدون حافظه بودن توزیع نمایی و سپس از بسط e^x استفاده شده است). منظور از $O(x)$ مجموعهٔ توابعی است که به‌ازای xهای کوچک، یک بینهایت کوچک درجه دوم به‌بالا هستند. به‌زبان ریاضی

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{O(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \qquad (۱۶.۳)$$

به‌عنوان نمونه، تابع x^2 از نوع $O(x)$ است، درحالی‌که تابع x شامل این مجموعه نمی‌شود.

براساس خاصیت «د»، می‌توان نتیجه‌گیری کرد که در فرایند پواسون احتمال اینکه در یک فاصلهٔ کوتاه زمانی Δt، همزمان دو پیشامد اتفاق بیفتد، بینهایت کوچک درجه دوم است. بنابراین، هیچ‌گاه دو پیشامد همزمان به‌وقوع نمی‌پیوندد.

ورود کاملا تصادفی

با توجه به‌قضیهٔ فوق، ورود پواسون را گاهی **ورود کاملا تصادفی** هم می‌گویند، زیرا احتمال ورود یک مشتری در فاصلهٔ کوتاه Δt مستقل از زمان گذشته است و فقط بستگی به‌مدت Δt و λ دارد.

۳.۳ فرایند شمارشی

این‌فرایند معرف تعداد پیشامدهایی است که تا لحظهٔ معینی‌اتفاق افتاده‌است. درحالت کلی، چنانچه $\{N(t), t \geqslant 0\}$ معرف یک‌فرایندشمارشی باشد، به‌ازای $t \geqslant 0$، $N(t)$ نشاندهندهٔ تعداد پیشامدهایی است که از لحظهٔ صفر تا t صورت گرفته است. نمونه‌های فرایندهای شمارشی عبارت‌اند از:

- تعداد حوادث رانندگی که در یک شهر و در مدتی معین اتفاق می‌افتد.
- تعداد بچه‌هایی که در مدت معینی در یک بیمارستان متولد می‌شوند.
- تعداد مشتریانی که تا لحظهٔ t وارد یک‌سیستم صف‌شده و یا ازآن خارج‌شده‌اند.

براساس این تعریف، $N(t)$ فقط می‌تواند اعداد صحیح غیرمنفی را انتخاب کند. ضمنا فرایند شمارشی تابعی افزاینده (برحسب t) است، یعنی به‌ازای $t < t'$ داریم:

$$N(t) \leqslant N(t')$$

از طرف دیگر، تعداد پیشامدهایی که بین t و t' اتفاق می‌افتد، برابر با $N(t') - N(t)$ خواهد بود. ضمناً فرض می‌کنیم که $N(0) = 0$، یعنی شمارش پیشامدها از لحظهٔ صفر شروع شود.

در یک فرایند شمارشی، ممکن است خاصیت رشد مستقل وجود داشته باشد. معنای این خاصیت این است که تعداد پیشامدهایی که در یک فاصلهٔ زمانی معین رخ می‌دهد (یا به‌عبارت دیگر، مقدار رشد $N(t)$ در این فاصله)، مستقل از تعداد پیشامدهایی است که در یک فاصلهٔ زمانی دیگر اتفاق می‌افتد (به‌فرض اینکه این دو فاصلهٔ زمانی غیرمشترک باشند). مثلا، در یک سیستم صف، خاصیت رشد مستقل در الگوی ورود مشتری آن بدین معناست که تعداد مشتریهایی که فرضاً بین ساعت ۹ تا ۱۰ وارد می‌شوند ارتباطی با تعداد مشتریهایی که قبلا، مثلا از ساعت ۸ تا ۹ وارد شده‌اند، ندارد.

خاصیت دیگری که در یک فرایند شمارشی می‌تواند وجود داشته باشد، خاصیت رشد ثابت است. معنای این خاصیت آن است که تعداد پیشامدهایی که در فاصلهٔ زمانی معینی پیش می‌آید، مستقل از زمان وقوع آنهاست و فقط بستگی به طول مدت آن فاصله دارد. مثلا، اگر خاصیت رشد ثابت در الگوی ورود مشتری به یک سیستم صف صدق کند، تعداد مشتریهایی که مثلا از ساعت ۸ تا ۹ وارد می‌شوند، با تعداد مشتریانی که در هر ساعت دیگر، مثلا ۱۱ تا ۱۲ وارد می‌شوند، تابع توزیع یکسانی دارد. اما، اگر در یک سیستم، ورود مشتریها در زمانهای مختلف متفاوت باشد، دیگرخاصیت رشد ثابت صدق نمی‌کند. مثلا در یک جایگاه فروش بنزین، میانگین تعداد مشتریهای مراجعه‌کننده (اتومبیلها) از ساعت ۸ تا ۹ خیلی بیشتر از میانگین تعداد مشتریهایی است که بین ساعات ۲۲ تا ۲۳ مراجعه کنند.

۴.۳ فرایند پواسون

فرایند پواسون حالت خاصی از فرایند شمارشی محسوب می‌شود.

تعریف. فرایند شمارشی $\{N(t), t \geqslant 0\}$ را فرایند پواسون با پارامتر λ می‌نامند، اگر تعداد پیشامدهایی که در فاصلهٔ زمانی t، مثلا از زمان s تا زمان $t+s$ اتفاق می‌افتد، طبق توزیع پواسون و (به‌ازای تمام مقادیر s و t)، به‌شرح زیر باشد

$$P[N(t+s) - N(s) = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad (۱۷.۳)$$

ضمناً فرض می‌کنیم که خاصیت رشد مستقل نیز وجود داشته باشد.

براساس تعریف فوق، خاصیت رشد ثابت نیز مسلماً وجود خواهد داشت، زیرا رابطهٔ فوق به‌ازای تمام مقادیر s و t صادق است. درنتیجه:

$$P[N(s+t)-N(s)=n]=P[N(t)=n]=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$ (۱۸.۳)

در اینجا لازم است که به تفاوت فرایند پواسون و توزیع پواسون نیز اشاره شود. در توزیع پواسون تنها پارامتر λ مطرح است. درحالی‌که درفرایند پواسون علاوه‌براین پارامتر، با زمان (t) نیز سروکار داریم. اگر در توزیع پواسون به‌جای پارامتر λ، λt را قرار دهیم، فرایند پواسون به‌دست می‌آید. از طرف دیگر، به‌ازای مقدار ثابتی از t، مقدار λt نیز ثابت خواهد بود و فرایند پواسون به‌توزیع پواسون تبدیل می‌شود.

میانگین و واریانس در فرایند پواسون

اگر $N(t)$ معرف فرایند پواسون باشد،

$$E[N(t)]=\sum_{n=0}^{\infty} nP(N(t)=n)=\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=\lambda t$$ (۱۹.۳)

(در محاسبهٔ فوق از بسط سری e استفاده شده است). همان‌طور که مشاهده می‌شود، میانگین تعداد پیشامدها بستگی مستقیم به زمان دارد. در واقع، λ معرف میانگین تعداد پیشامدها درواحدزمان است. برای محاسبهٔ واریانس، ابتدا $E[N^2(t)]$ را حساب‌می‌کنیم.

$$E[N^2(t)]=\sum_{n=0}^{\infty} n^2e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=(\lambda t)^2+\lambda t$$ (۲۰.۳)

درنتیجه

$$\operatorname{var}[N(t)]=\{E[N(t)]\}^2-E[N^2(t)]=(\lambda t)^2-(\lambda t)^2+\lambda t=\lambda t$$ (۲۱.۳)

لازم به‌یادآوری است که می‌توان میانگین و واریانس را با استفاده از تابع مولدگشتاور به‌دست آورد. تابع مولدگشتاور فرایند پواسون عبارت است از:

$$M_{\cancel{X}(t)}(s)=e^{\lambda t(e^s-1)}$$

$$M_{N(t)}=$$

۵.۳ رابطهٔ بین فرایند پواسون و توزیع نمایی

فرض کنید که تعداد پیشامدها طبق فرایند پواسون باشد. اگر اولین پیشامد در زمان s_1، دومی در s_2 و بالاخره nامین پیشامد در زمان s_n صورت گیرد و زمانهای بین دو پیشامد را به‌ترتیب $T_1, T_2, \ldots, T_n$ بنامیم، یعنی $T_1=S_1$ و $T_2=S_2-S_1$ و $T_n=s_n-s_{n-1}$ باشد. در این‌صورت می‌توان ثابت کرد که $T_1, T_2, \ldots, T_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمایی هستند. پارامتر این متغیرهای تصادفی همان پارامتر فرایند پواسون خواهد بود. اثبات ریاضی این موضوع به‌شرح زیر است.

ابتدا نشان خواهیم داد که T_1 دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است، زیرا

$$P(T_1>x)=P(X \text{ روی ندادن هیچ پیشامدی تا زمان })=P[N(x)=0]=e^{-\lambda x}$$

در مرحلهٔ بعد، بااستفاده از روابط زیر، نمایی بودن T_2 اثبات می‌شود.

$$P(T_2>x|T_1=s)=P(s+x \text{ تا } s \text{ روی‌ندادن هیچ پیشامد درفاصلهٔ زمانی }|T_1=s)$$
$$=P(s+x \text{ تا } s \text{ روی‌ندادن هیچ پیشامدی درفاصلهٔ زمانی })=e^{-\lambda x}$$

(در رابطهٔفوق، تساوی دوم از خاصیت رشدثابت ناشی می‌شود). به‌همین‌ترتیب، می‌توان همین خاصیت را برای T_3 و T_4 و ... نشان داد.

بنابراین، می‌توان گفت که فرایند پواسون و توزیع نمایی دو روی یك سکه‌اند. فرایند پواسون تعداد پیشامدها را مشخص‌می‌کند و توزیع نمایی فاصلهٔ بین دو پیشامد متوالی را نشان می‌دهد. مثلا، دریك سیستم‌صف، اگر ورود مشتریها طبق فرایند پواسون باشد، می‌توان گفت زمان بین دو ورود متوالی مشتریها براساس توزیع نمایی است. عکس این موضوع نیز صادق است.

مثال ۴.۳ مشتریهای یك‌بانك براساس فرایندپواسون مراجعه می‌کنند.درهر ساعت، به‌طورمتوسط ۱۰ نفر مشتری وارد می‌شوند.پس‌از باز شدن بانك درصبح، احتمال اینکه در ۱۵ دقیقهٔ اول کسی مراجعه نکند، چقدراست؟ احتمال اینکه بین ورود هفتمین وهشتمین مشتری وقفه‌ای حداقل برابر یك ساعت پیش بیاید، چقدر است؟

حل: پارامتر فرایند پواسون عبارت است از $\lambda=10$. طبق بحث فوق، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها طبق توزیع نمایی با پارامتر پواسون (۱۰) است. بنابراین،

$$P(T_1>0/25)=e^{-(10)(0/25)}=e^{-2/5}$$

$$P(T_8>1)=e^{-10}$$

(در رابطه‌های فوق، T_1 معرف زمان ورود اولین مشتری و T_8 معرف زمان بین ورود هفتمین و هشتمین مشتری است و ضمناً ۱۵ دقیقه به ۰٫۲۵ ساعت تبدیل شده است).

ارتباط بین فرایند پواسون و توزیع نمایی را به‌صورت ساده‌تر نیز می‌توان نشان داد. اگر تعداد پیشامدها براساس فرایند پواسون باشد، در هر لحظه طبق خاصیت رشد مستقل، پیشامدهای‌ازآن‌لحظه به‌بعد را می‌توان مستقل از گذشته فرض کرد. به‌عبارت‌دیگر، مبدأ زمان را می‌توان همین لحظه در نظر گرفت. بدین ترتیب، زمان پیشامد بعدی‌متغیری تصادفی است که فاقد حافظه است. ضمناً میانگین تعداد پیشامدها از این لحظه تا t برابر با λt است، که با خاصیت «د» توزیع نمایی تطبیق‌می‌کند. بنابراین، زمان بین دوپیشامد متوالی هم متغیری تصادفی با توزیع نمایی است.

۶.۳ خواص فرایند پواسون

قضیه ۲.۳ اگر $N_1(t)$ و $N_2(t)$ فرایندهای پواسون با پارامترهای به ترتیب λ_1 و λ_2 باشند، در این‌صورت فرایند $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$ نیز فرایند پواسون، با پارامتر $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ خواهد بود.

اثبات: می خواهیم ثابت کنیم که $P(N(t)=n)=e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$. برای نشان‌دادن این موضوع از تابع مولد گشتاور استفاده می کنیم. می‌دانیم که

$$M_{N(t)}(s)=M_{N_1(t)}(s)\cdot M_{N_2(t)}(s) \qquad (۲۲.۳)$$

اما تابع تولید گشتاور این فرایند، همان‌طور که قبلا گفته شد، عبارت‌است از:

$$M_{N(t)}(s)=\{e^{\lambda_1 t(e^s-1)}\}\{e^{\lambda_2 t(e^s-1)}\}=e^{\lambda t(e^s-1)}$$

که تابع مولد گشتاور فرایند پواسون با پارامتر $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ است.

از این قضیه می‌توان نتیجه‌گیری کرد که اگر سیستمی دارای n نوع مشتری باشد، و هر نوع مشتری، مستقل از سایر مشتریها و براساس فرایند پواسون وارد سیستم شود، ورود کل مشتریها نیز مجموعاً براساس فرایند پواسون خواهد بود. این موضوع قبلا در هنگام بحث دربارهٔ توزیع نمایی (خاصیت ب) نیز مطرح‌شد (ارتباط بین این‌دوموضوع را به‌صورت تمرین نشان دهید).

قضیه ۳.۳ سیستمی‌را درنظر بگیرید که ورودمشتریها به آن براساس فرایندپواسون، $N(t)$ و دارای پارامتر λ است. مشتریها از دو نوع ۱ و ۲ هستند. هر مشتری با احتمال P از نوع ۱ و با احتمال $1-P$ از نوع ۲ است. اگر تعداد مشتریهای نوع ۱ که وارد سیستم می‌شوند را با $N_1(t)$ و نوع ۲ را با $N_2(t)$ نشان دهیم، $N_1(t)$ و $N_2(t)$ نیز به‌صورت فرایند پواسون و مستقل از یکدیگر خواهند بود. پارامتر فرایند اولی λP و دومی $\lambda(1-P)$ است.

اثبات: می خواهیم ثابت کنیم که

$$P[N_1(t)=n]=e^{-(\lambda P)t}\frac{(\lambda P t)^n}{n!} \qquad (۲۳.۳)$$

برای محاسبهٔ این احتمال، پیشامد مورد نظر را مشروط به تعداد کل مشتریهای وارد شده می‌کنیم.

$$P[N_1(t)=n]=\sum_m P[N_1(t)=n|N(t)=m]P[N(t)=m] \qquad (۲۴.۳)$$

اما، احتمال اینکه تا زمان t کلا n مشتری از نوع ۱ وارد شده باشد، درحالی‌که جمعاً m مشتری وارد سیستم شده است، براساس توزیع دوجمله‌ای است.

$$P[N_1(t)=n|N(t)=m]=\binom{m}{n}P^n(1-P)^{m-n}$$

بنابراین

$$P[N_1(t)=n]=\sum_{m=n}^{\infty}\binom{m}{n}P^n(1-P)^{m-n}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^m}{m!}$$

$$=\frac{P^n}{n!}(\lambda t)^n e^{-\lambda t}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(1-P)^{m-n}}{(m-n)!}(\lambda t)^{m-n}$$

سری فوق بسط سری از نوع e^x است، پس

$$P[N_1(t)=n]=\frac{P^n}{n!}(\lambda t)^n e^{-\lambda t}e^{\lambda t(1-P)}=e^{-\lambda P t}\frac{(\lambda P t)^n}{n!}$$

مثال ۵.۳ مثال شماره ۴.۳ را مجدداً در نظر بگیرید. اگر هر مشتری با احتمال ۰٫۸ مرد باشد، به‌سؤالات زیر پاسخ دهید.

احتمال اینکه در ۱۵ دقیقهٔ اول باز شدن بانک در صبح، هیچ مردی مراجعه نکند، چقدر است؟

احتمال اینکه بین ورود دهمین زن و یازدهمین زن بیش از یک ساعت فاصله بیفتد، چقدر است؟

حل: طبق قضیهٔ فوق، ورود مشتریان مرد و همچنین ورود مشتریان زن طبق فرایند پواسون است. میانگین تعداد مشتریان مردی که در یک ساعت مراجعه می‌کنند، برابر با $8=(0.8)(10)$ و میانگین تعداد مشتری‌زن برابر با $2=(0.2)(10)$ است. بنابراین اگر T_i و T'_i به‌ترتیب معرف زمانهای بین دو ورود مشتری مرد و زن باشد،

اولین

$$P(T_1>0.25)=e^{-(8)(0.25)}=e^{-2}$$

$$P(T'_{11}>1)=e^{-(2)(1)}=e^{-2}$$

مثال ۶.۳ مثال شمارهٔ ۴.۳ را مجدداً در نظر بگیرید. میانگین زمان ورود مشتری دهم چقدر است؟

حل: چون

$$S_{10}=T_1+T_2+\dots+T_{10}$$

و از طرف دیگر می‌دانیم که T_iها دارای توزیع نمایی و مستقل هستند، لذا

$$E(S_{10})=10E(T_1)=10(0.1)=1$$

قضیهٔ ۴۰۳ فرایند شمارشی $\{N(t), t \geq 0\}$، با مشخصات زیر، یک فرایند پواسون با پارامتر λ است

الف. $N(0)=0$

ب. دارای خاصیتهای رشد مستقل باشد (یعنی تعداد پیشامدهـا در فواصل زمانی مجزا، مستقل از یکدیگر باشد)

ج. احتمال وقوع یک پیشامد در فاصلهٔ کوتاه s متناسب بـا این فاصله باشد، یعنی
$$P[N(s)=1]=\lambda s+\theta(s)$$

د. احتمال وقوع بیش از یک پیشامد در فاصلهٔ کوتـاه s وجود نداشته باشد، یعنی $P[N(s)\geq 2]=\theta(s)$ (همان‌طور که قبلاً گفتیم، منظور از $\theta(x)$ تابعی بینهایت کوچک از درجهٔ ۲ است، یعنی

$$\lim_{x\to 0}\frac{\theta(x)}{x}=0$$

اثبات: برای سهولت محاسبات از قرارداد زیر استفاده می‌کنیم.

$$P_n(t)=P[N(t)=n] \qquad (۲۵.۳)$$

بدین‌ترتیب، $P_n(t)$ معرف احتمال وقوع n پیشامد تا لحظهٔ t است. برای اینکه نشان‌دهیم فرایند مورد نظر پواسون است، باید ثابت کنیم که

$$P_n(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

برای این منظور از معادلات دیفرانسیل به‌شرح زیر استفاده می‌کنیم. ابتدا $P_n(t)$ را بـا بهره‌گیری از خاصیت امید شرطی محاسبه می‌کنیم:

$$P_n(t+s)=P[N(t+s)=n]=\sum_{m=0}^{\infty}P[N(t+s)=n|N(t)=m]$$
$$P[N(t)=m]$$

رابطهٔ فوق را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned}P_n(t+s)=&\sum_{m=0}^{n-2}P[N(t+s)=n|N(t)=m]P_m(t)\\&+P[N(t+s)=n|N(t)=n-1]P_{n-1}(t)\\&+P[N(t+s)=n|N(t)=n]P_n(t)\\&+\sum_{m=n+1}^{\infty}P[N(t+s)=n|N(t)=m]P_m(t)\end{aligned}$$

اما طبق فرضهای ب و ج رابطه‌های زیر را داریم. اگر $m\leq n-2$ باشد،

$$P[N(t+s)=n|N(t)=m]=P[\text{وقوع بیش از یک پیشامد درمدت زمان } s]=\theta(s)$$

و همچنین

$$P[N(t+s)=n|N(t)=n-1]$$
$$=P[\text{وقوع دقیقاً یک پیشامد در مدت زمان } s]=\lambda s+\theta(s)$$

و

$$P[N(t+s)=n|N(t)=n]=P[\text{وقوع هیچ پیشامد در فاصلهٔ زمانی } s]$$
$$=1-P[\text{وقوع یک پیشامد یا بیشتر در فاصلهٔ زمانی } s]=1-\lambda s+\theta(s)$$

پس‌از جایگزینی عبارات فوق و در نظر گرفتن اینکه مجموع چند تابع $\theta(s)$ نیز تابعی به‌شکل $\theta(s)$ خواهد بود، رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{P_n(t+s)-P_n(t)}{s}=\lambda P_{n-1}(t)-\lambda P_n(t)+\frac{\theta(s)}{s}$$

در حد، موقعی که s به‌سمت صفر میل می‌کند و با در نظر گرفتن مفهوم مشتق تابع، رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود

$$P'_n(t)=\lambda P_{n-1}(t)-\lambda P_n(t) \quad , \quad n=0,1,2,\ldots \qquad (۲۶.۳)$$

برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲۶.۳)، ابتدا $P_0(t)$ را محاسبه می‌کنیم و آن‌گاه نتیجه را برای محاسبهٔ $P_1(t)$ بـه‌کار می‌گیریم. این‌کار را ادامه می‌دهیم تـا جواب سایر معادلات نیز به دست آید. بنابراین

$$P'_0(t)=-\lambda P_0(t)$$

درنتیجه

$$P_0(t)=Ke^{-\lambda t}$$

از شرط اولیه $P_0(0)=1$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$P_0(t)=e^{-\lambda t} \qquad (۲۷.۳)$$

کـه معرف فرایند پواسون است. در حالت کلی به‌ازای $n=1,2,$ رابطهٔ (۲۵.۳) را می‌توان به‌شکل زیرهم نشان داد.

$$e^{\lambda t}[P'_n(t)+\lambda P_n(t)]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$$

در نتیجه،

$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t) \qquad (۲۸.۳)$$

اکنون، با استفاده از روش استقرا می‌توان قضیه‌را ثابت کرد. یعنی فرض می‌کنیم که به‌ازای $(n-1)$، فرایند مورد بحث پواسون است، پس،

$$P_{n-1}(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (۲۹.۳)$$

حال، می‌توان از روابط (۲۷.۳) و (۲۸.۳) نتیجه گرفت که

$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}P_n(t)] = \lambda^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (۳۰.۳)$$

یا

$$P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} + C$$

از شرط اولیه $P_n(0) = 0$ استفاده می‌کنیم. $C = 0$ به‌دست می‌آید و قضیه ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۵.۳ (تابع توزیع زمان ورود مشتری، مشروط بر اینکه تعداد مشتریهای وارد شده معلوم باشد).

فرض کنید که ورود مشتریها براساس فرایند پواسون است. اگر بدانیم که در فاصلهٔ $(0, t)$ دقیقاً یک مشتری وارد شده است (ولی نمی‌دانیم که در چه لحظه‌ای وارد شده است)، تابع توزیع ورود او براساس متغیر تصادفی یکنواخت (درهمین فاصله) خواهد بود.

اثبات: اگر T معرف زمان ورود این مشتری باشد.

$$P[T \leqslant x \mid N(t) = 1] = \frac{P[T \leqslant x,\ N(t) = 1]}{P[N(t) = 1]} \qquad (۳۱.۳)$$

$= P($وارد شدن یک مشتری در فاصلهٔ زمانی ۰ تا x و وارد نشدن هیچ مشتری در فاصلهٔ زمانی x تا $t)$

$$= \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)e^{-\lambda(t-x)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)} = \frac{x}{t}$$

قضیهٔ فوق را می‌توان تعمیم داد. اگر بدانیم تا لحظهٔ مشخصی دقیقاً n نفر وارد سیستم شده‌اند، می‌توان فرض کرد که هر مشتری طبق توزیع یکنواخت وارد شده است و ورود مشتریهای مختلف مستقل از یکدیگر است.

مثال ۷.۳ تعداد مشتریهایی که به‌یک سیستم صف مراجعه می‌کنند، به‌صورت توزیع

پواسون با میانگین ۵ در ۵ مشتری درساعت است. اگر درسه ساعت اول دومشتری مراجعه کرده باشند، احتمال اینکه هر دو مشتری در ساعت اول آمده باشند، چقدر است؟

حل: طبق قضیهٔ ۵.۳، هر کدام از این دو مشتری، براساس توزیع یکنواخت، در فاصلهٔ سه‌ساعت مراجعه کرده‌اند. بنابراین، احتمال ورود هر مشتری درساعت اول یک‌سوم و احتمال ورود هر دو مشتری در ساعت اول یک‌نهم است.

۷.۳ تابع توزیع ارلانگی

به‌علت اهمیت نقش **تابع توزیع ارلانگی** (داگاما) در سیستمهای صف، در این بخش به تعریف و بررسی خواص آن می‌پردازیم.

در فصول بعدی خواهیم دید که ساده‌ترین مدلهای صف آنهایی هستند که براساس متغیر تصادفی نمایی ساخته شده‌اند. خاصیت بدون حافظه بودن این متغیر تصادفی، حل مدلهای نمایی را بسیار آسان می‌سازد. بنابراین، طبیعی است که حتی‌الامکان سعی می‌شود مسائل صف درچارچوب مدلهای نمایی فورموله شوند. با وجود این، مسلماً همهٔ آنها را نمی‌توان در این قالب جا داد. متغیرهای تصادفی، نظیر مدت زمان خدمت و یا زمان بین دو ورود مشتریها در سیستمهای صف، از توابع توزیع متنوعی پیروی می‌کنند.

تابع توزیع ارلانگی، اگر چه از نظر سادگی محاسباتی در حد توزیع نمایی نیست، در مقایسه با سایر متغیرهای تصادفی به‌متغیر تصادفی نمایی نزدیکتر است و در مواردی با تبدیل آن به متغیرهای تصادفی نمایی از سهولت محاسباتی خاصیت بدون حافظه بودن استفاده می‌کند. مزیت عمدهٔ آن نسبت به‌توزیع نمایی این است که در عمل پدیده‌های تصادفی بسیاری را می‌توان برحسب آن بیان کرد.

تعریف. متغیر تصادفی x را، که دارای تابع چگالی به شرح زیر باشد، ارلانگی می‌نامند.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{r-1}}{(r-1)!}, \quad x > 0 \qquad (۳۲.۳)$$

λ و r پارامترهای ارلانگی و هردو مقادیر مثبتی هستند. علاوه براین، r همیشه عددصحیح است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، این‌متغیرتصادفی دارای حالت خاص توزیع گاماست، که در آن پارامتر r فقط اعداد صحیح را انتخاب می‌کند. (در توزیع گاما، r، هرعدد مثبتی را می‌تواند انتخاب کند؛ بنابراین، چون به‌ازای rهای غیر عدد صحیح $(r-1)!$ بی‌معناست، به‌جای آن $\Gamma(r)$ به‌کار گرفته می‌شود. در حالت‌های خاص، که r عددصحیح باشد، مفهوم هردو عبارت یکسان است.

میانگین متغیر تصادفی ارلانگی برابر با r/λ و واریانس آن برابر با r/λ^2 وتابع مولد گشتاور آن $[\lambda/(\lambda-t)]^r$ است.

قضیهٔ ۶.۳ مجموع n متغیر تصادفی نمایی مستقل با پارامترهای λ، یك متغیر تصادفی ارلانگی با پارامترهای (λ و n) است.

اثبات: متغیرهای تصادفی مستقل نمایی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ را در نظر بگیرید. اگر $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ پارامترهای آنها و Y مجموع آنها باشد، همان‌طور کـه قبلا گفته شد تابع مولد گشتاور Y برابر بـا حاصل‌ضرب تـوابع تولید گشتاور $X_1, X_2, \ldots, X_n$ است. یعنی

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$

از طرف دیگر می‌دانیم کـه تابع مولد گشتاور X_i برابر $\lambda/(\lambda - t)$ است. بنابراین، تابع مولد گشتاور Y برابر بـا $(\lambda/\lambda - t)^n$ خواهد بود، که می‌دانیم این تابع مولد گشتاور مربوط به یك متغیر تصادفی ارلانگی با پارامترهای λ و n است.

میانگین و واریانس توزیع ارلانگی را از قضیهٔ فوق نیز می‌توان به دست آورد. ازآنجا که یك متغیر تصادفی ارلانگی با پارامترهای λ و n معادل مجموع n متغیر تصادفی مستقل نمایی بـا پارامتر λ است، میانگین و واریانس آنهم n برابر میانگین و واریانس یك متغیر تصادفی نمایی است. از این‌راه نیز می‌توان میانگین و واریانس توزیع ارلانگی را محاسبه کرد، که با نتایج قبلی تطبیق می‌کند.

قضیهٔ ۷.۳ اگـر ورود مشتریها براساس فرایند پواسون باشد، زمان ورود مشتری nام، یعنی S_n، متغیری تصادفی با توزیع ارلانگی و باپارامترهای λ و n است.

اثبات: می‌دانیم که S_n، زمان ورود مشتری nام، برابر با مجموع فواصل زمانی‌بین ورودهای متوالی n مشتری است، یعنی

$$S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

که T_i زمان بین ورود مشتری $(i - 1)$ ام و مشتری iام است. چون T_iها مستقل و دارای توزیع نمایی با پارامتر λ هستند، لذا طبق قضیهٔ (۶.۳) متغیر تصادفی S_n نیز دارای‌تابع توزیع ارلانگی خواهد بود.

اثر تغییرات پارامتر r

همان‌طور که گفتیم، متغیر تصادفی ارلانگی با دو پارامتر λ و r مشخص می‌شود. از طرف دیگر، این متغیر تصادفی را می‌توان مجموع r متغیر تصادفی نمایی بـا پارامتر λ فرض کرد. حال مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی ارلانگی را در نظر بگیرید که میانگین آنها مقدار ثابت K (یعنی $r/\lambda = K$) باشد. در این‌صورت، با تغییر r، پارامتر λ نیزمتناسب با آن تغییر می‌کند. به‌عنوان نمونه، اگر r دو برابر شود، λ نیز باید دو برابر گردد تا مقدار K ثابت بماند. بـه‌عبارت دیگر، در چنین حالتی تعداد متغیرهـای نمایی دو برابر

می‌شود، اما میانگین هرکدام ازآنها به‌نصف تقلیل می‌یابد. به‌این‌ترتیب، میانگین‌ارلانگی ثابت می‌ماند.

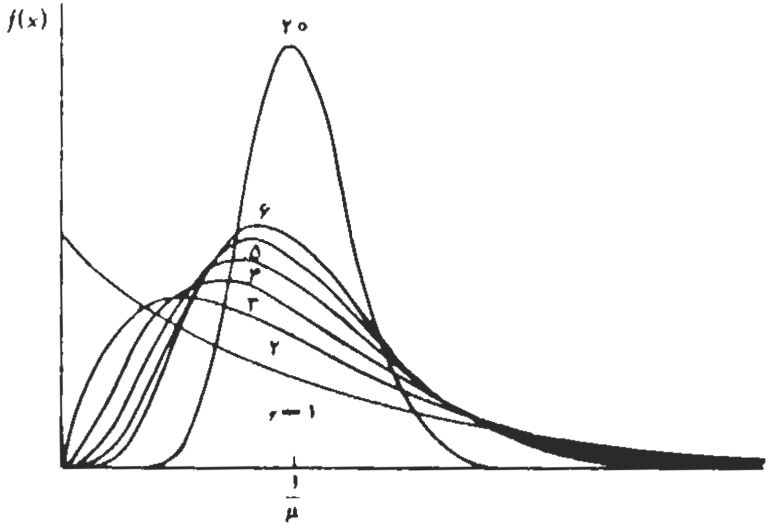
با توجه به مراتب فوق، اثر تغییرات r را برای مجموعه‌ای از متغیرهـای تصادفی ارلانگی با میانگین ثابت K بررسی می‌کنیم. درحالتهای خاص، که $r = 1$ است، توزیع ارلانگی به‌نمایی تبدیل می‌شود. با تغییر r توابعی مختلف بوجود می‌آید،که درشکل ۵.۳ نشان داده شده است. ضمناً طبق قضیه حـد مرکزی در احتمالات، موقعی کـه r افزایش یابد، تابع چگالی (۳۲.۳) به‌سمت تابع چگالی نرمال میل می‌کند.

چنانچه $r = \infty$ اختیارشود، تابع توزیع فوق دیگر ماهیت تصادفی نخواهدداشت و فقط مقداری ثابت، برابر با K، اختیار خواهد کرد. این موضوع را می‌توان بـااستفاده از رابطهٔ کلی میانگین و واریانس توزیع ارلانگی نشان داد، زیرا در حالت کلی رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\operatorname{var}(X) = \frac{r}{\lambda^2} = \frac{[E(X)]^2}{r} \qquad (۳۳.۳)$$

حال، اگـر مقدار میانگین ثابت و برابر با K باشد و $r \to \infty$، واریانس نیز بـه‌صفر میل می‌کند. می‌دانیم کـه اگر واریانس یك متغیر تصادفی برابر با صفر باشد، آن متغیر ثابت و قطعی است.

با توجه به‌شکل ۵.۳، مشاهده می‌شود که مجموعهٔ توابع ارلانگی بسیار متنوع‌هستند



شکل ۵.۳ مجموعه توابع چگالی ارلانگی برحسب r و با فرض ثابت بودن میانگین

و می‌توان داده‌های آماری بسیاری از متغیرهای تصادفی را با یکی از توابع این مجموعه منطبق ساخت. فرض کنید که داده‌های آماری یك متغیر تصادفی، مثلا مدت زمان ارائهٔ خدمت در یك سیستم صف در اختیار باشد. از روی این داده‌ها می‌توان میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را تخمین زد. با توجه به متنوع بودن توزیع ارلانگی، امکان زیادی وجود دارد که داده‌های مورد نظر با آن تطبیق کند. یکی از محاسن توزیع ارلانگی، همین خاصیت تنوع آن است که بسیاری از متغیرهای تصادفی واقعی را می‌توان در قالب آن جای داد.

معمولا در جریان حل مسائلی که در آن با متغیر تصادفی ارلانگی سروکار داشته باشیم، با حل انتگرالهای بسیار پیچیده و مفصل برخورد می‌کنیم. با استفاده از قضیهٔ زیر، در مواردی می‌توان محاسبات را ساده‌تر کرد.

قضیهٔ ۸.۳ تابع توزیع ارلانگی با پارامترهای λ و r را از رابطهٔ زیر می‌توان به‌دست آورد:

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(\lambda x)^k}{k!} \qquad (۳۴.۳)$$

اثبات: طبق تعریف، تابع توزیع این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}dt$$

$$=1-\int_x^\infty \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}dt$$

برای محاسبهٔ انتگرال فوق، از تغییر متغیری به‌شکل $y=t-x$ استفاده می‌کنیم.

$$F(x)=1-\int_0^\infty \lambda^r e^{-\lambda(y+x)}\frac{(y+x)^{r-1}}{(r-1)!}dy \qquad (۳۵.۳)$$

با استفاده از بسط دوجمله‌ای خواهیم داشت:

$$(y+x)^{r-1}=\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r-1}{k}x^k y^{r-1-k} \qquad (۳۶.۳)$$

بنابراین، رابطهٔ (۳۵.۳) به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}\int_0^\infty \lambda^r e^{-\lambda y}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{x^k y^{r-1-k}}{(r-1-k)!k!}dy \qquad (۳۷.۳)$$

یا

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(\lambda x)^k}{k!(r-1-k)!}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)^{r-k-1}dy \qquad (۳۸.۳)$$

انتگرال فوق برابر با $(r-1-k)!$ است؛ زیرا، طبق خاصیت تابع گاما رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\Gamma(\alpha)=\int e^{-u}u^{\alpha-1}du=(\alpha-1)! \qquad (۳۹.۳)$$

(در عبارت فوق $u=\lambda y$ است). به‌این‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

مثال ۸.۳ یك سیستم صف با یك خدمت‌دهنده را در نظر بگیرید. مدت زمان خدمت، نمایی با میانگین ۲۰ دقیقه است. یك مشتری در صف منتظر و خدمت‌دهنده مشغول ارائهٔ خدمت به‌مشتری دیگری است. احتمال اینکه مشتری موردنظر در صف، بیش‌از یك ساعت دیگر در سیستم بماند، چقدر است؟

حل: مدت زمان انتظار این مشتری در سیستم از دو قسمت تشکیل می‌شود. قسمت اول، زمان انتظار او در صف، که برابر با مدت زمان دریافت خدمت مشتری دیگر است و آن‌را با X_1 نشان می‌دهیم. قسمت دوم مدت زمانی است که خود او خدمت دریافت می‌کند و با X_2 بیان می‌شود؛ بنابراین، اگر مدت زمان ماندن این مشتری در سیستم را با Y نشان دهیم، $Y=X_1+X_2$ خواهد بود. از طرفی چون X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی نمایی‌هستند، Y یك متغیر تصادفی ارلانگی است. میانگین خدمت توسط یك خدمت‌دهنده ۳ مشتری در ساعت یعنی $\mu=3$ است. لذا Y دارای توزیع ارلانگی با پارامترهای (۲، ۳) است. هدف مسئله، محاسبهٔ $P(Y>1)$ است. طبق قضیهٔ (۸.۳) خواهیم داشت.

$$P(Y>1)=e^{-\mu}\sum_{k=0}^{1}\frac{(\mu)^k}{k!}=e^{-\mu}\left[\frac{(\mu)^0}{0!}+\frac{\mu}{1!}\right]=4e^{-3}$$

مسائل

۱. مدت تعمیر ماشینی براساس توزیع نمایی و میانگین یك و نیم ساعت است. احتمال اینکه تعمیر این ماشین بیش‌از ۱۲ ساعت طول بکشد چقدر است؟ احتمال اینکه تعمیر ماشین بیش از ۱۲ ساعت طول بکشد، درحالی‌که می‌دانیم تا این لحظه ۱۱ ساعت طول کشیده، چقدر است؟

۲. در یك آزمایش که ۴ ساعت به‌طول می‌انجامد، از لامپی استفاده می‌شود که عمر آن متغیری تصادفی با میانگین ۵ ساعت است. احتمال اینکه قبل‌از پایان آزمایش، این‌لامپ نسوزد را در چهار حالت زیر حساب کنید:

الف. عمر لامپ دارای توزیع نمایی است، و لامپ، نو است.
ب. عمر لامپ دارای توزیع نمایی است، و لامپ، قبلاً ۵ ساعت کار کرده است.
ج. عمر لامپ دارای توزیع یکنواخت (روی فاصلهٔ صفر تا ۱۰ ساعت است)، و لامپ نو، است.
د. عمر لامپ دارای توزیع یکنواخت (روی فاصلهٔ صفر تا ۱۰ ساعت است)، و لامپ قبلاً ۵ ساعت کار کرده است.

۳. تعداد تصادفات یک‌جاده براساس فرایند پواسون است. فرض می‌شود که به‌طور متوسط هر دو ساعت یک‌بار یک تصادف اتفاق می‌افتد. احتمال اینکه بین ساعت ۸ تا ۸:۲۵ حداقل سه تصادف اتفاق بیفتد، چقدر است؟ احتمال اینکه در ۲۴ ساعت تصادفی نباشد، چقدر است؟

۴. در تعمیرگاهی، دو ماشین الف و ب در حال تعمیر هستند. مدت زمان تعمیر هر دو ماشین، نمایی و دارای میانگین، به‌ترتیب ۲ ساعت و ۳ ساعت است. احتمال اینکه ماشین «ب» زودتر تعمیر شود، چقدر است؟

۵. دو نوع جزوهٔ درسی برای تکثیر به‌چاپخانه فرستاده می‌شود. نوع الف که تعداد نسخهٔ معدودی از آن لازم است، و نوع ب که تعداد زیادی نسخه از آن گرفته می‌شود. تعداد جزوه‌هایی که به‌چاپخانه می‌رسد، براساس فرایند پواسون با میانگین ۱۶ عدد از نوع الف و ۱۵ عدد از نوع ب در هر ساعت است. اگر الان ساعت ۱۰:۳۸ باشد و بدانیم که آخرین جزوهٔ نوع الف در ساعت ۱۰:۲۵ و آخرین جزوهٔ نوع ب در ساعت ۱۰:۱۸ به‌چاپخانه رسیده است،
الف. احتمال اینکه تا ساعت ۱۰:۴۰ سه جزوه به‌چاپخانه برسد، چقدر است؟
ب. احتمال اینکه تا ساعت ۱۰:۴۰ دو جزوهٔ نوع الف و یک‌جزوهٔ نوع ب برسد، چقدر است؟
ج. احتمال اینکه اولین جزوه‌ای که به‌چاپخانه می‌رسد از نوع الف باشد، چقدر است؟
د. آیا در فاصلهٔ بین آمدن دو جزوهٔ فوق (یعنی در ساعتهای ۱۰:۱۸ و ۱۰:۲۵) ممکن است سه جزوهٔ دیگر هم به‌چاپخانه رسیده باشد؟ احتمال آن چقدر است؟
هـ. اگر تا ساعت ۹ تعداد ۱۲ جزوه از نوع الف رسیده باشد، میانگین کل تعداد جزوه‌های رسیده به‌چاپخانه تا ساعت ۹ چقدر است؟ (فرض می‌کنیم وقت شروع کار سیستم ساعت ۷ بوده است).

۶. از جاده‌ای که عرض آن تقریباً معادل یک اتومبیل است، اتومبیلها طبق فرایند پواسون (با میانگین سه اتومبیل در هر دقیقه)، عبور می‌کنند. شخصی بدون توجه به اتومبیلها، عرض جاده را در ۱۰ ثانیه طی می‌کند. احتمال اینکه سالم از جاده بگذرد، چقدر است؟

۷. مسئلهٔ ۶ را مجدداً در نظر بگیرید. فرض کنید که مدت عبور این شخص متغیر تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۱۰ ثانیه است. احتمال اینکه این شخص سالم از جاده بگذرد، چیست؟

۸. کامیونی دارای ۱۰ چرخ، دو چرخ روی محور جلو و هشت چرخ روی محور عقب است. فرض کنید مسافتی که طی می‌شود تا یکی از لاستیکها پنچر شود متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. به‌طور متوسط لاستیک جلو کامیون ۱۰ هزار کیلومتر و لاستیک عقب ۸۰۰۰ کیلومتر را بدون پنچر شدن طی می‌کند.
الف. احتمال اینکه پس‌از طی m کیلومتر، هیچ‌کدام از لاستیکها پنچر نشود، چقدر است؟
ب. اگر اولین لاستیک در کیلومتر Y پنچر شود، تابع توزیع Y و همچنین $E(Y)$ را به‌دست آورید.
ج. تابع توزیع تعداد لاستیکهای پنچر شده تا کیلومتر ۵۰ هزار را محاسبه کنید.

۹. یک کارگاه تولیدی دارای سه ماشین صنعتی است. مسئول هر ماشین پس‌از مدتی کار، جهت تنظیم مجدد و کنترل قطعات تولید شده، مدتی هم آن‌را خاموش می‌کند. مدت‌زمان روشن‌بودن وهمچنین خاموشی ماشینها، متغیرهای تصادفی نمایی و مستقل هستند. میانگین مدت زمان روشن بودن ماشین اول را ۳۰ دقیقه و مدت زمان روشن بودن ماشینهای دوم و سوم را هرکدام ۲۰ دقیقه، میانگین مدت زمان خاموشی ماشین اول را ۱۵ دقیقه و مدت زمان خاموشی ماشینهای دوم و سوم را هرکدام ۱۰ دقیقه فرض می‌کنیم. یک لحظهٔ مشخص را در نظر بگیرید و فرض کنید که ۳ دقیقه از روشن شدن ماشین اول، ۸ دقیقه از روشن شدن ماشین دوم و ۱۳ دقیقه از روشن شدن ماشین سوم گذشته است و هر سه‌ماشین هنوز روشن هستند.
الف. احتمال اینکه ماشین شمارهٔ ۱ بین ۸ دقیقه و ۱۲ دقیقه پس‌از لحظهٔ موردنظر خاموش شود، چقدر است؟
ب. احتمال اینکه یکی از ماشینها زودتر از همه، بین ۸ دقیقه و ۱۲ دقیقه پس از لحظهٔ مورد نظر خاموش شود، چقدر است؟
ج. احتمال اینکه ماشین شمارهٔ یک زودتر از همه خاموش شود، چقدر است؟
د. احتمال اینکه ماشین شمارهٔ یک زودتر از همه خاموش شود و این خاموشی بین ۸ تا ۱۲ دقیقه پس‌از لحظهٔ مورد نظر اتفاق بیفتد، چقدر است؟

۱۰. مثال ۲.۳ (سیستم صف و دو خدمت‌دهنده) را مجدداً در نظر بگیرید. احتمال اینکه مشتری جدیدی بعد از هر دو مشتری از سیستم خارج شود، چقدر است؟ احتمال اینکه مشتری جدید، قبل‌از یکی‌از دو مشتری قدیمی از سیستم خارج شود، چقدر است؟ احتمال اینکه مشتری جدید قبل‌از مشتری شمارهٔ ۱ خارج شود، چقدر است؟

۱۱. کارخانه‌ای که دارای ۲ ماشین مشابه تزریق پلاستیک است، درصدد بستن قراردادی برای تولید انبوه قطعه‌ای پلاستیکی است. مدت قرارداد طوری است که فقط دو هزار

۴۵

ساعت وقت برای تولید در اختیار است. هر ماشین تا موقعی که خراب نشده می‌تواند ۱۰ عدد قطعهٔ موردنظر را در ساعت تولید کند، ولی چنانچه ماشین خراب شود، با درنظر گرفتن زمان لازم برای تعمیرات، دیگر نمی‌توان از آن ماشین برای این تولید بخصوص استفاده کرد. مدت زمانی که ماشین بدون خراب شدن می‌تواند کار کند، طبق برآورد، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و با میانگین هزار ساعت است.

الف. احتمال اینکه بتوان ۲۰ هزار قطعهٔ مورد نظر را تولید کرد، چقدر است؟

ب. احتمال اینکه بتوان حداقل ۳۰ هزار قطعهٔ مورد نظر را تولید کرد، چقدر است؟

ج. به سؤال بند ب مجدداً پاسخ دهید، مشروط بر اینکه محدودیت هزار ساعت وقت وجود نداشته باشد.

دو

۱۲. ماشینی که دارای ۵ موتور مشابه مستقل است، درصورتی کار می‌کند که حداقل سه موتور آن سالم باشد. اگر فرض کنیم که احتمال خراب شدن هر موتور دارای توزیع نمایی است، تابع چگالی کارکرد این ماشین را به‌دست آورید.

۱۳. دستگاهی دارای سه نوع لامپ مخصوص است که آنها را A و B و C می‌نامیم. عمر هر سه لامپ نمایی و میانگین آنها به ترتیب ۲۰۰ و ۴۰۰ و ۳۰۰ ساعت است. هر لامپ که بسوزد، بلافاصله با یک لامپ نو، از نوع خودش، تعویض می‌شود.

الف. احتمال اینکه اولین لامپ نوع A بین ۶۰۰ تا ۱۲۰۰ ساعت کار کند، چیست؟

ب. احتمال اینکه اولین لامپ نوع A قبل از اولین لامپ نوع B بسوزد، چیست؟ احتمال اینکه اولین لامپی که می‌سوزد از نوع A باشد، چیست؟

ج. احتمال اینکه تعداد لامپهایی که در ۱۲۰۰ ساعت اول می‌سوزد بیش از سه عدد باشد، چیست؟ (مجموع هر سه نوع)

د. احتمال اینکه بعد از سوختن دومین لامپ نوع A، اولین لامپ نوع B هنوز سالم باشد، چیست؟

سوال ای

۱۴. یک کارگاه مبلسازی را در نظر بگیرید که مراجعهٔ مشتریها به آن بر اساس فرایند پواسون است. در این کارگاه، فقط یک گروه سازندهٔ مبل وجود دارد.

الف. در کدام یک از دو حالت زیر می‌توان این کارگاه را یک سیستم صف از نوع $M/M/1$ فرض کرد؟ چرا؟

حالت ۱. کارگاه سفارش انواع مختلف مبل و میز و صندلی را قبول می‌کند

حالت ۲. کارگاه تولید فقط یک نوع میز مشخص را به‌صورت سریسازی قبول می‌کند

ب. فرض کنید مشتریهایی که مراجعه می‌کنند بر دو نوع‌اند، یعنی به احتمال ۷۰ درصد مشتری جدید و به احتمال ۳۰ درصد مشتری قدیمی هستند. احتمال اینکه در هفتهٔ اول دو مشتری جدید و یک مشتری قدیمی مراجعه کنند، چقدر است؟ احتمال اینکه بعد از هشتمین مشتری جدید، یک مشتری قدیمی مراجعه کند، چقدر است؟

ج. اگر در طول سال دقیقاً ۲۶ مشتری مراجعه کرده باشند، احتمال اینکه در هفتهٔ دوم یک مشتری مراجعه کرده باشد، چقدر است؟

سطر اول صفحه بعد منتقل شود

احتمال اینکه در هر هفته دقیقاً یک مشتری مراجعه کرده باشد، چقدر است؟

۱۵. اگر $N(t)$ معرف فرایند پواسون باشد، $E[N(t)\cdot N(t+s)]$ را حساب کنید.

۱۶. بیمارانی که به یک بیمارستان مراجعه می‌کنند، با احتمال ۰٫۱ احتیاج به بستری‌شدن دارند. اگر مراجعهٔ آنها براساس فرایند پواسون با میانگین ۳ نفر در ساعت باشد، احتمال اینکه در شش ساعت اول ۱۰ بیمار بستری شوند، چقدر است؟

۱۷. سیستمی در ساعت ۸ صبح شروع به کار می‌کند. ورود مشتریها براساس فرایند پواسون است. فرض کنید تا ساعت ۱۱ صبح، جمعاً ۵ نفر وارد سیستم شده‌اند. احتمال اینکه بین ساعت ۹ تا ۹:۱۵ یک نفر وارد شده باشد، چقدر است؟ احتمال اینکه حداقل ۳ نفر وارد شده باشند، چقدر است؟

۱۸. متغیرهای تصادفی مستقل X_i، $(i=1, 2, \ldots, n)$، را در نظر بگیرید. هر متغیر به احتمال P مقدار یک و به احتمال $(1-P)$ مقدار صفر را انتخاب می‌کند. متغیر تصادفی جدیدی به شرح زیر تعریف می‌کنیم.

$$S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

ثابت کنید که متغیر تصادفی فوق دارای توزیع پواسون است، به‌فرض اینکه N نیز دارای توزیع پواسون با پارامتر λ باشد.

۱۹. تعداد تصادفات یک اتومبیل در سال براساس توزیع پواسون با میانگین n است. چنانچه عمر این اتومبیل دارای توزیع نرمال (با میانگین m) باشد، میانگین تعداد تصادفات را در مدت عمر این ماشین حساب کنید.

۲۰. به یک سیستم صف، مشتریها طبق فرایند پواسون وارد می‌شوند. اگر به‌طور متوسط ساعتی ۸ مشتری به سیستم مراجعه کنند، با چه احتمالی مشتری چهارم قبل از نیم‌ساعت اول وارد سیستم می‌شود؟

۲۱. دو نوع مشتری به فروشگاهی مراجعه می‌کنند. ورود هر دو مشتری براساس فرایند پواسون، به‌ترتیب دارای پارامترهای ۵ و ۱۰ نفر در ساعت است.

الف. احتمال اینکه اولین مشتری که وارد می‌شود از نوع ۱ باشد، چقدر است؟

ب. احتمال اینکه پنجمین مشتری نوع ۱ قبل از دومین مشتری نوع ۲ وارد شود، چقدر است؟

۲۲. مشتریهای یک سیستم طبق فرایند پواسون با آهنگ ۱۲ مشتری در ساعت وارد می‌شوند. اگر در ۱۰ ساعت اول ۱۰۰ مشتری وارد شده باشند، احتمال اینکه در چهار ساعت آخر ۵۰ نفر وارد شده باشند، چقدر است؟

۲۳. در یک اداره، کمیسیونی درخواستهای متقاضیان را هر ماه یک بار بررسی می‌کند،

۴۱

این متقاضیان طبق فرایند پواسون با آهنگ λ مراجعه می‌کنند. برای اینکه مدت انتظار آنها کمتر شود، تصمیم گرفته شده است که این کمیسیون یک‌بار نیز در طول ماه جلسه تشکیل دهد. نشان دهید برای اینکه مدت زمان انتظار متقاضیان حداقل شود، بهترین تصمیم این است که جلسهٔ اضافی این کمیسیون در وسط هر ماه تشکیل شود.

۲۴. عمر یک قطعهٔ حساس ماشینی طبق توزیع نمایی با پارامتر λ است. این قطعه را به‌دو دلیل عوض می‌کنند. یا خراب شود و یا عمرش به T برسد. میانگین مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا این قطعه را عوض کنند، چقدر است؟

۲۵. چنانچه فاصلهٔ زمانی بین هر دو ورود متوالی مشتریها به‌سیستم، متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ و مستقل از یکدیگر باشد، ثابت‌کنید که تعداد مشتریهایی که در فاصلهٔ صفر تا t وارد می‌شوند براساس فرایند پواسون با پارامتر λ است.
راهنمایی: از نتیجهٔ مسئلهٔ شماره ۲ فصل اول و همچنین قضیهٔ ۸.۳ استفاده‌کنید.

۲۶. در یک کارخانه، به‌طور متوسط هر چهار روز یک‌بار یک حادثه اتفاق می‌افتد. زمان بین دو حادثهٔ متوالی نمایی فرض می‌شود. ۲۵ درصد این حوادث منجر به مجروح شدن افراد می‌گردد و بقیه آنها جزئی هستند.
الف. احتمال اینکه در هشت روز آینده چهار حادثه اتفاق بیفتد، چیست؟
ب. احتمال اینکه درهشت روزآینده هیچ حادثهٔ منجر به‌مجروح‌شدن اتفاق نیفتد، چیست؟
ج. احتمال اینکه اولین حادثه‌ای که اتفاق می‌افتد جزئی باشد، چیست؟ چرا؟
د. احتمال اینکه در یک روز حداقل یک حادثه جزئی اتفاق بیفتد. ولی حادثهٔ منجر به‌مجروح شدن اتفاق نیفتد، چیست؟
ه. خسارت روزانهٔ ناشی‌از n حادثه، معادل $2000n + 10000$ برآورد می‌شود(چنانچه حادثه‌ای اتفاق بیفتد، طبیعتاً خسارتی هم وارد خواهد شد). میانگین خسارت روزانهٔ ناشی‌از حوادث را تعیین‌کنید.
و. در بیست روزگذشته دوحادثه اتفاق افتاده است. احتمال اینکه هر دو حادثه دریکی‌از روزهای اول یا دوم اتفاق افتاده باشد، چیست؟ احتمال اینکه یکی از آنها در روز اول‌و دیگری در روز دوم اتفاق افتاده باشد، چیست؟

۲۷. ماشینهایی که دارای دو موتور هستند، برای تعمیر به‌تعمیرگاهی فرستاده می‌شوند. مدت زمان تعمیر هر موتور (و نه هر ماشین) دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۰ دقیقه است. احتمال اینکه فقط یک موتور هر ماشین خراب باشد، ۵۰ درصد و احتمال اینکه هر دو موتور خراب باشند، نیز برابر با ۵۰ درصد است. میانگین و واریانس مدت‌زمان تعمیر هر ماشین را به‌دست آورید.

۲۸. مسافری در لحظهٔ t به ایستگاه اتوبوس می‌رسد. اتوبوسها طبق فرایند پواسون با پارامتر λ وارد ایستگاه می‌شوند. زمان انتظار این مسافر را W می‌نامیم. تابع توزیع و

میانگین W را می‌خواهیم تعیین‌کنیم. مشخص کنیدکه کدام یک از جوابهای زیر صحیح است (و یا احتمالا هیچ‌کدام صحیح نیست).

الف. طبق خاصیت پواسون، $E(W) = \frac{1}{\lambda}$

ب. ورود مسافر در فاصلهٔ بین دو ورود اتوبوسهای متوالی کاملا تصادفی بوده است. لذا زمان ورود او را طبق توزیع یکنواخت در نظر می‌گیریم که میانگین آن نصف زمان بین دو ورود متوالی اتوبوسهاست؛ پس،

$$E(W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

۲۹. یک مدل $M/M/1$، که در آن آهنگ ورود مشتریها λ و آهنگ خدمت‌دهی μ است، را در نظر بگیرید. در یک لحظه مشخص سیستم خالی است. مدت زمانی که از این لحظه به‌بعد طول می‌کشد تا اولین مشتری خارج شود را E فرض می‌کنیم. نشان دهید که

$$P(E > t) = \frac{\mu e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\mu t}}{\mu - \lambda}$$

۳۰. در یک جاده، اتومبیلها طبق فرایند پواسون عبور می‌کنند (با پارامتر λ). شخصی می‌خواهد عرض این جاده را طی کند. مدت زمان عبور او ثابت و برابر با T است. بنابراین، موقعی می‌تواند این کار را انجام دهدکه زمان بین عبور دو اتومبیل متوالی از T کمتر نباشد. N را تعداد اتومبیلهایی در نظر بگیرید که از جلو این شخص عبور می‌کنند تا فرصت عبور برای او پیدا شود. تابع توزیع N چیست؟ میانگین مدت زمان انتظار این شخص چیست؟

۳۱. سفر یک سفینهٔ فضایی به‌زمان T نیاز دارد. اجسام موجود در فضا ممکن است با این سفینه تصادف کنند و آن را از بین ببرند. این اجسام طبق فرایند پواسون (λ) جلو سفینه ظاهر می‌شوند. اگر چنین جسمی در مسیرسفینه قرار گیرد، با احتمال P_1 تصادف می‌کند و با احتمال $1 - P_1$ ازکنار آن می‌گذرد. سفینه مورد نظر برای دفاع از خود، دارای موشکهایی است‌که بمحض مشاهدهٔ چنین اجسامی به‌طرف آنها شلیک می‌شوند. هر موشک با احتمال P_2 جسم مقابل را از بین می‌برد. اگر سفینه دارای دو موشک باشد، احتمال اینکه سفرش را با موفقیت به‌پایان برساند، چیست؟

۳۲. یک گروه شکارچی‌را برای به‌دام انداختن یک‌جفت‌حیوان اعزام کرده‌اند. هرحیوانی که بدام می‌افتد، با احتمال P نر و با احتمال $(1 - P)$ ماده است. اگر N معرف تعداد حیواناتی باشدکه به‌دام می‌افتند تا یک جفت به‌دست آید، $E(N)$ را محاسبه‌کنید. فرض کنید تعداد حیواناتی‌که به‌دام می‌افتند، طبق فرایند پواسون و T مدت زمانی است‌که

برای این‌کار تعیین شده است. احتمال اینکه این گروه بتواند در این مدت یك جفت به‌دست آورد، چیست؟

اکنون فرض کنید که قبل‌از زمان T، ماموریت این گروه به‌پایان رسیده است. میانگین مدت زمانی که‌مصرف کرده‌اند، چیست؟

۰۳۳. مسئلهٔ ۲۳ فصل دوم را با استفاده از مفهوم خاصیت بدون حافظه‌بودن توزیع نمایی مجدداً حل کنید.

۰۳۴. با استفاده از تابع مولد گشتاور نشان دهیدکه در توزیع ارلانگی اگر r به‌سمت بینهایت میل کند، تابع چگالی آن مقدار ثابتی خواهد شد.

۴

زنجیره‌های مارکوف

چون بسیاری از سیستم‌های صف بر اساس **فرایند مارکوف** ساخته شده‌اند، لذا در این فصل ابتدا به بررسی احتمالی مفهوم این فرایند و سپس با تفصیل بیشتر به بحث در مورد حالتهای خاص آن به نام **زنجیره‌های مارکوف** و **زنجیره‌های مارکوف با زمان پیوسته** می‌پردازیم.

۱.۴ فرایند مارکوف

برای روشن شدن مفهوم کلی فرایند مارکوف، می‌توان گفت که اگر زمان را در این فرایند، به سه دورهٔ «گذشته»، «حال» و «آینده» تقسیم کنیم، «آینده» این فرایند بستگی به مسیری که در «گذشته» طی کرده است، ندارد و تنها به‌موقعیت آن در زمان «حال» وابسته است. مثلاً، فرایند پواسون نوعی فرایند مارکوف است، زیرا در آن تعداد پیشامدهایی که از یك لحظهٔ معین به‌بعد اتفاق می‌افتد، مستقل از پیشامدهایی است که قبل از آن افتاده است. به‌عبارت دیگر، چنانچه وضعیت فرایند در لحظاتی مانند $t_1, t_2, \ldots, t_n$ مشخص باشد، می‌توان گفت که برای پیش‌بینی حرکت آیندهٔ این فرایند، تنها آخرین اطلاعات، یعنی وضعیت فرایند در لحظهٔ t_n کافی است.

خاصیت مارکوفی یك فرایند را می‌توان به‌زبان ریاضی نیز نشان داد. مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X(t), t \geqslant 0\}$ را درنظر بگیرید. اگر $X(t)$ طبق فرایند مارکوف عمل کند، به‌ازای تمام مقادیر $x_1, x_2, \dots$ و x_n رابطهٔ زیر برقرار است.

$$P[X(t_{n+1}) \leqslant x | X(t_n)=x_n, \dots, X(t_2)=x_2, X(t_1)=x_1]$$
$$= P[X(t_{n+1}) \leqslant x | X(t_n)=x_n] \qquad (۱.۴)$$

فرایندهای مارکوف را، به‌طور کلی، برحسب دو عامل طبقه‌بندی می‌کنند:

الف. پارامتر t، که می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد. گسسته بودن t را می‌توان چنین تفسیر کرد که رفتار سیستم تنها در مقاطع مشخصی از زمان مطالعه می‌شود. در صورتی که t گسسته باشد، $X(t)$ با متغیرهای تصادفی به شکل $X_1, X_2, \dots$ و X_n جایگزین می‌شود.

ب. مجموعهٔ مقادیری را که $X(t)$ می‌تواند انتخاب کند، برحسب تعریف، **حالت سیستم** می‌نامند. حالت سیستم نیز می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد.

۲.۴ زنجیره‌های مارکوف

زنجیره‌های مارکوف حالت خاصی از فرایند مارکوف است، که در آن هم پارامتر t وهم حالت سیستم، فقط مقادیر گسسته را انتخاب می‌کند. بر این اساس، یك رشته متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots$ و X_n را زنجیرهٔ مارکوف می‌نامند، اگر به‌ازای تمام مقادیر n، و تمام حالتهای i و j رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$P[X_{n+1}=j|X_1=i_1, X_2=i_2, \dots, X_n=i] = P[X_{n+1}=j|X_n=i] \qquad (۲.۴)$$

در اینجا به n، مرحله نیز گفته می‌شود.

مثال ۱.۴ نقطه‌ای فیزیکی را درنظر بگیرید که روی خطی مستقیم حرکت می‌کند. در هر حرکت، این نقطه به احتمال P به اندازهٔ یك میلی‌متر به‌جلو و به احتمال $1-P$ به‌همین‌اندازه به‌عقب می‌رود. اگر $X(t)$، یعنی حالت‌سیستم را موقعیت این‌نقطه روی‌خط درنظر بگیریم، $X(t)$ یك زنجیرهٔ مارکوف تشکیل می‌دهد؛ زیرا موقعیت نقطه درحرکتهای بعدی، تنها به‌وضعیت فعلی‌آن بستگی دارد و مستقل از مسیری است که‌درگذشته طی کرده است (این فرایند را **قدم زدن تصادفی** نیز می‌گویند).

احتمال تغییر حالت سیستم از i به j، یا به عبارت دیگر احتمال حرکت نقطه روی خط به شرح زیر است:

$$P[X_{n+1}=i+1|X_n=i]=P$$
$$P[X_{n+1}=i-1|X_n=i]=1-P$$

اگر $j \neq i+1$ یا $j \neq i-1$ باشد، $P[X_{n+1}=j|X_n=i]=0$

زنجیره‌های مارکوف همگن، حالت خاصی از زنجیرهٔ مارکوف است که در آن احتمال گذار سیستم از هر حالت به حالت دیگر مستقل از مرحلهٔ آن (n) باشد. به‌بیان ریاضی، زنجیرهٔ مارکوف را درصورتی همگن می‌نامیم که به‌ازای تمام مقادیر i و j و n رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$P[X_{n+1}=j|X_n=i]=P[X_1=j|X_0=i]=P_{ij} \qquad (۳.۴)$$

بنابراین، در یك زنجیرهٔ مارکوف همگن، P_{ij} معرف احتمال تغییر حالت سیستم از i به j است. از این به‌بعد، فرض می‌کنیم که زنجیره‌های مارکوف مورد بررسی، همگن هستند.

زنجیرهٔ مارکوف مثال ۱.۴ از نوع همگن است، زیرا احتمال حرکت نقطه به‌جلو یا عقب بستگی به تعداد حرکتهای انجام شده تا آن لحظه ندارد.

ماتریس‌گذار

ماتریس‌گذار، ماتریسی است که عنصر تشکیل دهندهٔ آن در سطر i و ستون j، مقدار P_{ij} (احتمال تغییر حالت سیستم از i به j) است. اگر فرض کنیم که تعداد حالتهای سیستم M است، ماتریس گذار آن به‌شکل زیر درمی‌آید.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} P_{12} & \cdots & P_{1M} \\ P_{21} P_{22} & \cdots & P_{2M} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{M1} P_{M2} & \cdots & P_{MM} \end{bmatrix} \qquad (۴.۴)$$

بدیهی است که تمام عناصر این ماتریس‌غیرمنفی است. مجموع عناصر هر سطر برابر با یك است (مجموع عناصر یك ستون لزوماً یك نیست). با توجه به نامتناهی بودن تعداد حالتهای سیستم، ابعاد ماتریس نیز می‌تواند نامتناهی باشد.

درمثال ۱.۴، حالت سیستم می‌تواند بین‌هرعدد صحیح، از منهای بینهایت تا به‌اضافهٔ بینهایت تغییر کند. به‌همین ترتیب ماتریس‌گذار نیز دارای ابعاد نامتناهی خواهد بود.

۴۴

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} & \cdots & & & & & \\ & \cdots & & & & & \\ & \cdots & & & & & \\ \cdots & q & 0 & p & \cdot & & \\ & \cdots & q & 0 & p & & \\ & & & q & 0 & p & \\ & & & & q & 0 & p \\ & & & & & q\;\;0 & p\;\cdots \\ & & & & & & \cdots \\ & & & & & & \cdots \end{bmatrix} \qquad (۵.۲)$$

در ماتریس فوق $q=1-p$ و در سایر محلها مقدار احتمال صفر است.

به‌طور کلی، هر ماتریس مربع که تمام عناصر آن غیر منفی و مجموع عناصر هر سطر آن برابر با یك باشد را **ماتریس مارکوف** می‌نامند.

مثال ۲.۴ فرض کنید که درآمد شخصی در روز Y باشد. Y متغیری تصادفی است که فقط اعداد صحیح غیرمنفی را انتخاب می‌کند و $P[Y=i]=a_i$ است. بدیهی است که $a_i \geqslant 0$ ، $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$. چنانچه X_n معرف مجموع درآمد آن شخص در n روز اول باشد X_n یك زنجیرهٔ مارکوف است، زیرا با دانستن درآمد آن شخص در n روز اول می‌توان تابع توزیع مجموع درآمد $(n+1)$ روز اول را محاسبه کرد. ماتریس گذار این زنجیرهٔ مارکوف به‌شرح زیر است

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

گذار m مرحله‌ای

با استفاده از ماتریس گذار، رابطهٔ بین حالتهای سیستم در دو مرحلهٔ متوالی مشخص می‌شود. به‌عبارت دیگر، با دانستن حالت هرمرحله، می‌توان تابع توزیع حالت سیستم را در مرحلهٔ بعد تعیین کرد. در این قسمت می‌خواهیم تعیین کنیم که چه رابطه‌ای بین حالت سیستم در یك مرحله و حالت آن در m مرحلهٔ بعد موجود است. به‌عبارت دیگر، سؤالی که

مطرح می‌شود این است که اگر در مرحله‌ای، حالت سیستم i باشد (یعنی $X_n = i$)، احتمال اینکه پس از m مرحله، حالت سیستم به j برسد (یعنی $X_{n+m}=j$)، چقدر است؟

بدیهی است با داشتن ماتریس گذار، می‌توان تابع توزیع X_{n+1} را به‌دست آورد. با دانستن حالت مرحلهٔ $n+1$، تابع توزیع X_{n+2} و به‌همین‌ترتیب X_{n+3}، ...، X_{n+m} به‌دست می‌آید. لیکن، هدف این است که بتوان رابطهٔ مستقیم بین X_n و X_{n+m} را مستقیماً تعیین کرد. برای این منظور ابتدا قرارداد زیر را تعریف می‌کنیم.

تعریف الف. $P_{ij}^{(m)}$ احتمال تغییر حالت سیستم از i به j در m مرحله است، یعنی،

$$P_{ij}^{(m)} = P[X_m = j \mid X_0 = i] \qquad (۶.۲)$$

ب. ماتریس گذار m مرحله‌ای ماتریسی است که اجزای آن $P_{ij}^{(m)}$ باشد، یعنی،

$$\mathbf{P}^{(m)}=\begin{bmatrix} P_{11}^{(m)} & \cdots & P_{1M}^{(m)} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{M1}^{(m)} & \cdots & P_{MM}^{(m)} \end{bmatrix} \qquad (۷.۲)$$

بنابراین برای تعیین رابطهٔ بین‌حالتهای سیستم در m مرحله، شناخت $P^{(m)}$ ضروری است. برای تعیین $P^{(m)}$ قضیهٔ زیر را می‌توان به‌کار گرفت.

قضیهٔ ۱.۴ الف. به ازای تمام حالتهای i و j و برای هر K و K' رابطهٔ زیر برقرار است

$$P_{ij}^{(k+k')} = \sum_{r=0}^{\infty} P_{ir}^{(k)} P_{rj}^{(k')} \qquad (۸.۲)$$

ب.

$$\mathbf{P}^{(m)} = P \cdot P \cdots\cdots P = P^m \qquad (۹.۲)$$

(رابطهٔ (۸.۲) که به رابطهٔ C-K[1] معروف است، بیان‌کنندهٔ این حقیقت است

1. Chapman - Kolomogrov

که احتمال تغییر حالت سیستم از i بــه j در $(k+k')$ مرحله، برابر بــا مجموع تغییر حالتهای سیستم از i به‌هر حالت دیگرسیستم، مثلا s در k مرحله و سپس از s به j در k' مرحله است.)

اثبات: با استفاده از معادلات شرطی نتایج زیر به‌دست می‌آید.

$$P_{ij}^{(k+k')} = P[X_{k+k'} = j \mid X_0 = i] = \qquad (۱۰.۴)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} P[X_{k+k'} = j \mid X_k = s,\ X_0 = i] \times P[X_k = s \mid X_0 = i] = \sum_{s=0}^{\infty} P_{sj}^{(k')} P_{is}^{(k)}$$

رابطهٔ (۱۰.۴) را به‌صورت ماتریس نیز می‌توان نوشت

$$P^{(k+k')} = P^{(k)} \cdot P^{(k')} \qquad (۱۱.۴)$$

چون رابطهٔ (۱۱.۴) به‌ازای تمام مقادیر k و k' صادق است، لذا

$$P^{(n)} = P \cdot P^{(n-1)}$$

از طرف دیگر

$$P^{(n-1)} = P \cdot P^{(n-2)}$$

و به‌همین ترتیب

$$P^{(2)} = P \cdot P$$

درنتیجه

$$P^{(n)} = P \cdot P \ldots P = P^n$$

مثال ۳.۴ زنجیرهٔ مارکوفی را در نظر بگیرید که ماتریس گذار آن به شرح زیر باشد (حالتهای سیستم را ۱ و ۲ و ۳ فرض کنید)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} ۰٫۷۵ & ۰٫۲۵ & ۰ \\ ۰٫۲۵ & ۰٫۵ & ۰٫۲۵ \\ ۰ & ۰٫۷۵ & ۰٫۲۵ \end{bmatrix}$$

مقادیر زیر را به‌دست آورید:

$P_{13}^{(2)}$ (احتمال اینکه سیستم از حالت ۱ شروع و پس‌از دو مرحله بــه ۳ برسد) و همچنین $P_{31}^{(2)}$

حل:

$$\mathbf{P}^{(2)} = P \cdot P = \begin{bmatrix} ۰٫۶۲۵ & ۰٫۳۱۲۵ & ۰٫۰۶۲۵ \\ ۰٫۳۱۲۵ & ۰٫۵ & ۰٫۱۸۷۵ \\ ۰٫۱۸۷۵ & ۰٫۵۶۲۵ & ۰٫۲۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$P_{13}^{(2)} = ۰٫۰۶۲۵$$

$$P_{31}^{(2)} = ۰٫۱۸۷۵$$

مقادیر فوق را می‌توان مستقیماً، یا با استفاده از رابطه‌های (۸.۴) نیز به‌دست آورد. مثلا

$$P_{13}^{(2)} = P_{11}P_{13} + P_{12}P_{23} + P_{13}P_{33} = ۰٫۰۶۲۵$$

که در واقع این عبارت حاصل‌ضرب سطر اول در ستون سوم ماتریس گذار است.

محاسبهٔ تابع توزیع حالت سیستم در هر مرحله

ممکن است در مواردی تعیین تابع‌توزیع سیستم درمرحلهٔ n مدنظر باشد. به‌عبارت دیگر، ممکن است هدف محاسبهٔ $P(X_n = j)$ به‌ازای حالتهای مختلف j و مراحل n باشد. این احتمال را گاهی به‌صورت $\pi_j^{(n)}$ نشان می‌دهند. چنانچه تابع توزیع حالت‌سیستم درمرحلهٔ شروع، یعنی $P(X_0 = i)$، به‌ازای تمام حالتها مشخص باشد، بااستفاده ازمفهوم احتمال شرطی‌وماتریس‌گذار خواهیم داشت:

$$\pi_j^{(n)} = P(X_n = j) = \sum_i P[X_n = j \mid X_0 = i] \times P[X_0 = i] \sum_i P_{ij}^{(n)} \cdot \pi_i^{(0)} \qquad (۱۲.۴)$$

=

یا

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} \times P^{(n)} \qquad (۱۳.۴)$$

$\pi^{(0)}$ و $\pi^{(n)}$ بردارهایی هستند که عناصر تشکیل‌دهندهٔ آنها $\pi_i^{(0)}$ و $\pi_i^{(n)}$ است.

محاسبهٔ احتمال حالت سیستم در چند مرحلهٔ مختلف

با دانستن حالت فعلی سیستم و ماتریس گذار می‌توانیم تابع توزیع حالت سیستم را در یك یــا چند مرحلهٔ بعد به‌دست آوریم؛ امــا، ممکن است مسیر مشخصی از حرکت آیندهٔ سیستم مدنظر باشد. مثلا، محاسبهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$P[X_1 = j,\ X_2 = k \mid X_0 = i] = P[X_2 = k \mid X_1 = j, X_0 = i] P[X_1 = j \mid X_0 = i]$$

$$= P_{jk} \cdot P_{ij}$$

بنابراین، احتمال فوق برابر است با حاصلضرب تغییر حالت سیستم از i به j و سپس j به k به همین ترتیب. احتمال حرکت در چند حالت مشخص و در مراحل مختلف را می‌توان محاسبه کرد، یعنی

$$P(X_n=q,\ X_{n-1}=k,\ \dots,\ X_1=j\mid X_0=i)=P_{ij}\cdots P_{kq} \qquad (۱۲.۲)$$

مثال ۴.۴ زنجیرهٔ مارکوف مثال ۳.۲ را در نظر بگیرید. به فرض اینکه در ابتدا سیستم بتواند حالتهای ۱ و ۲ و ۳ را با احتمالات مساوی انتخاب کند، مقادیر احتمالات زیر را محاسبه کنید.

$$A_1=P(X_3=2\mid X_0=1)$$
$$A_2=P(X_3=2)$$
$$A_3=P(X_3=2,\ X_2=3,\ X_1=2\mid X_0=1)$$
$$A_4=P(X_3=2,\ X_2=3,\ X_1=2)$$

حل: جملهٔ اول معرف احتمال تغییر حالت سیستم از ۱ به ۲ در سه مرحله است. به‌عبارت دیگر

$$A_1=P^{(3)}_{12}=\frac{23}{64}$$

جمله دوم معرف احتمال بودن سیستم در حالت ۲ است، درحالی‌که از موقعیت آن در شروع مراحل اطلاعی نداریم. به عبارت دیگر، حالت سیستم در مرحلهٔ صفر می‌تواند هرکدام از سه حالت ۱ و ۲ و ۳ باشد. با استفاده از احتمال شرطی،

$$A_2=\sum_{i=1}^{3}P(X_3=2\mid X_0=i)P(X_0=i)=\frac{1}{3}\left(P^{(3)}_{12}+P^{(3)}_{22}+P^{(3)}_{32}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{23}{64}+\frac{30}{64}+\frac{33}{64}\right)=\frac{43}{96}$$

جملهٔ سوم معرف احتمال تغییر حالت سیستم از ۱ به ۲ و سپس از ۲ به ۳ و پس از آن از ۳ به ۲ است. لذا

$$A_3=P_{12}P_{23}P_{32}=(0.25)(0.25)(0.75)=\frac{3}{64}$$

جملهٔ چهارم شبیه جمله سوم است. با این تفاوت که از موقعیت سیستم در شروع مراحل

اطلاعی نداریم. بنابراین، با استفاده از احتمالات شرطی داریم:

$$A_4=\sum_{i=1}^{3}P(X_3=2,\ X_2=3,\ X_1=2\mid X_0=i)P(X_0=i)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{64}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)=\frac{6}{64}$$

۳.۴ طبقه‌بندی حالتهای سیستم در یک زنجیرهٔ مارکوف

در این بخش به طبقه‌بندی حالتهای سیستم و معرفی چند واژهٔ مربوط به آن می‌پردازیم. هدف از این طبقه‌بندی، به‌کارگیری آن برای بررسی **احتمالات حدی** در زنجیرهٔ مارکوف است.

تعریف. حالت j از حالت i **دسترس‌پذیر** است اگر این امکان وجود داشته باشد که اصولاً سیستم بتواند از i به j انتقال پیدا کند. چنین انتقالی ممکن است در یک مرحله انجام نشود، ولی به‌هر حال امکانپذیر است. به‌زبان ریاضی، i به j دسترسی دارد، اگر بتوان حداقل یک مقدار n پیدا کرد که به‌ازای آن $P^{(n)}_{ij}>0$ باشد. اگر سیستم از i به j دسترسی داشته باشد، آن‌را به‌صورت $i\to j$ نشان می‌دهند.

تعریف. دو حالت i و j باهم **مرتبط** هستند، اگر $i\leftrightarrow j$؛ به‌عبارت دیگر، اگر هر دو حالت به‌هم دسترسی داشته باشند. بدیهی است که چون $P^{(0)}_{ii}=1$، هر حالت با خودش هم مرتبط است.

مثال ۵.۴ زنجیرهٔ مارکوف با ماتریس احتمالی سه‌گانهٔ زیر را در نظر بگیرید (حالتهای سیستم را ۱ و ۲ و ۳ می‌نامیم).

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

حالت ۱ به ۲ و ۲ به ۱ دسترسی‌پذیر است، زیرا $P_{12}=1>0$ و $P_{21}=0.5>0$، یعنی $1\leftrightarrow 2$. حالت ۱ به ۳ نیز دسترسی‌پذیر است، زیرا از ۱ می‌توان به ۲ و از ۲ به ۳ گذر کرد، پس $1\to 3$؛ به‌عبارت دیگر $1\to 2\to 3$ و طبق تعریف کافی است $P^{(2)}_{13}=0.5>0$. به‌همین ترتیب، می‌توان نشان داد که همهٔ حالتها باهم مرتبط هستند.

مثال ۶.۴ زنجیرهٔ مارکوفی با ماتریس گذاری به شرح زیر را در نظر بگیرید (حالتهای سیستم را ۱ و ۲ و ۳ و ۴ می‌نامیم)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حالت ۱ و ۲ باهم مرتبط هستند، از حالت ۳ می‌توان به‌تمام حالتها گذر کرد، ولی از سایر حالتها نمی‌توان به‌حالت ۳ دسترسی پیدا کرد، یعنی $2 \leftarrow 3$ ولی $3 \not\leftrightarrow 2$. از حالت ۴ نیز به‌هیچ حالت دیگری (غیر از خودش) نمی‌توان دسترسی یافت.

تعریف. الف. مجموعـهٔ تمام حالتهایی که بـا هم در ارتباط باشند را **یك کلاس** می‌نامند.

ب. سیستمی کـه فقط دارای یك کلاس باشد، یعنی تمام حالتهای آن باهم مرتبط باشند، را **سیستم یکپارچه** می‌نامند.

ج. مجموعـه‌ای از حالتها را **بسته** می‌نامند، اگـر امکان دسترسی از هیچ‌کدام از حالتهای این مجموعه به‌هیچ کدام از حالتهای خارج از آن وجود نداشته باشد، یعنی P_{ij} (به‌ازای تمام حالتهای i داخل مجموعه و j خارج از مجموعه) برابر با صفر باشد.

د. اگر حالتی مانند i، به‌تنهایی مجموعه‌ای بسته را تشکیل دهد، به‌آن حالت جاذب می‌گویند، که در این صورت $p_{ii} = 1$ است.

طبق تعاریف فـوق، زنجیرهٔ مارکوف مثال ۵.۲ فقط دارای یـك کلاس است و در نتیجه یك سیستم یکپارچه است، در حالی کـه زنجیرهٔ مارکوف مثال ۶.۲ دارای سه کلاس یعنی $\{1, 2\}$ و $\{3\}$ و $\{4\}$ است. ضمناً در مثال ۶.۲ حالت ۴ یك حالت جاذب است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، سیستم یکپارچه مجموعهٔ بسته‌ای است کـه هیچ کدام از زیرمجموعه‌های آن نمی‌تواند مجموعهٔ بسته باشد.

قضیهٔ ۴.۲ اگر $i \leftrightarrow j$ و $j \leftrightarrow k$، پس $i \leftrightarrow k$.

اثبات: چون $i \leftrightarrow j$، بنابراین می‌توان دو عدد مانند n و n' را پیدا کرد که

$$p_{ji}^{(n')} > 0 \ , \ P_{ij}^{(n)} > 0 \qquad (۱۵.۲)$$

به‌همین ترتیب، چون $j \leftrightarrow k$، دو عدد m و m' وجود دارد که

$$p_{kj}^{(m')} > 0 \ , \ p_{jk}^{(m)} > 0 \qquad (۱۶.۲)$$

بنابراین

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)} \cdot p_{rk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} \cdot p_{jk}^{(m)} > 0 \qquad (۱۷.۲)$$

درنتیجه $k \leftrightarrow j$. با همین روش می‌توان نشان داد که $i \leftrightarrow k$.

مثال ۵.۲ را مجدداً در نظر بگیرید. چون $1 \leftrightarrow 2$ و $2 \leftrightarrow 3$، لذا طبق قضیهٔ فوق حالتهای ۱ و ۳ نیز باهم مرتبط هستند.

تعریف. فرض کنید کـه حالت سیستم در یك مرحله i باشد. احتمال اینکه در مراحل بعدی سیستم به i برگردد را با f_i نشان می‌دهیم. حالت i را **برگشت‌پذیر** می‌نامیم اگر $f_i = 1$ باشد. به‌همین ترتیب، اگر $f_i < 1$ باشد، حالت i **گذرا** نامیده می‌شود.

به‌این ترتیب، اگر سیستم به‌حالت برگشت‌پذیری مانند i برسد، در یکی ازمراحل بعدی به‌طور حتم به‌این حالت برمی‌گردد. لیکن، چنانچه از یك حالت گذرا شروع کند، لزوماً به‌آن حالت برنمی‌گردد، اگرچه امکان رسیدن به‌آن حالت هم برایش وجود دارد.

مثال ۶.۲ را در نظر بگیرید. حالت ۳ گذراست، زیرا اگر سیستم از این حالت به‌هر حالت دیگر برود، امکان باز گشت آن‌وجود ندارد. دراین مثال، $f_1 = 1$، $f_2 = 1$، $f_3 = 0.3$ و $f_4 = 1$ است. درنتیجه‌حالت ۳ گذرا و حالتهای ۱ و ۲ و ۴ برگشت‌پذیر هستند. برای نمونه مقدار f_1 را محاسبه می‌کنیم.

$f_1 = P$[شروع سیستم از ۱ و بـرگشت مجدد آن بـه ۱ در یکی از مراحل بعد]

$= 1 - P$[شروع سیستم از ۱ و هرگز برنگشتن آن به ۱]

اما اینکه سیستم از ۱ شروع کند وهرگز به ۱ برنگردد به‌معنای آن‌است که از ۱ به‌حالت ۲ برود و از این مرحله به‌بعد فقط در حالت ۲ بماند. احتمال این‌کار برابر است با

$$\lim_{n \to \infty} (0.5)(0.7)^n = 0$$

پس $f_1 = 1$ است.

میانگین تعداد دفعات برگشت به‌یك حالت

براساس این تعریف، اگر حالت i برگشت‌پذیر باشد و سیستم وارد این حالت شود، حتماً در آینده (نزدیك یا دور) سیستم مجدداً به i برمی‌گردد. به‌همین ترتیب، فرایند مجدداً از i شروع می‌شود و باز طبق ایـن تعریف، به‌همین حالت برمی‌گردد. درنتیجه، بـا تکرار این‌کار می‌توان گفت که تعداد دفعاتی‌که سیستم وارد حالت i می‌شود، نامتناهی است.

اما اگر حالت i گذرا باشد و سیستم از این‌حالت شروع کند، به‌احتمال f_i مجدداً به i برمی‌گردد و به‌احتمال $(1 - f_i)$ هرگز بازنمی‌گردد. به‌همین ترتیب، احتمال اینکه سیستم از i شروع کند، پس‌از مدتی به i برگردد و از آن پس هرگز به‌این حالت مراجعه نکند، عبارت از $f_i(1 - f_i)$ است. در حالت کلی، احتمال اینکه سیستم دقیقاً n مرتبه‌به i برگردد وپس‌ازآن هرگز برنگرددبرابر $f_i^{n}(1 - f_i)$ است. همان‌طور که مشاهده‌می‌شود

$\frac{f_1}{1-f_1}$

مقدار این احتمال دارای توزیع هندسی است، که میانگین آن $f_1 / 1 - f_1$ خواهد بود. درنتیجه، میانگین تعداد دفعاتی که سیستم به i برمی‌گردد عددی متناهی است.

برای اثبات قضیهٔ زیر، ازخاصیت فوق درمورد حالتهای برگشت‌پذیر و گذرا، بمنظور محاسبهٔ تعداد دفعاتی که سیستم به‌آنها برمی‌گردد، استفاده می‌شود.

قضیهٔ ۳.۴ دریك زنجیرهٔ مارکوف، چنانچه در مورد حالتی ازسیستم، مثلا i، مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ نامتناهی باشد، آن حالت برگشت‌پذیر، واگر عددی متناهی باشد، آن حالت گذراست.

اثبات: احتمال اینکه سیستم از i شروع کند و مجدداً درمرحلهٔ n به‌حالت i برسد، برابر با $p_{ii}^{(n)}$ است. دراین مرحله، تعداد دفعاتی که سیستم به i می‌رسد یا صفر یا یك است. بنابراین، میانگین تعداددفعات مراجعهٔ سیستم به‌حالت i درمرحلهٔ n برابر با $P_{ii}^{(n)}$ است. بدین‌ترتیب، $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ معرف میانگین تعداد دفعاتی است که سیستم در دراز مدت به i برمی‌گردد. براساس آنچه که قبلا گفته‌شد، برای حالت i درصورتی که برگشت‌پذیر باشد، این مقدار نامتناهی و برای حالت گذرا عددی متناهی است.

درمثال ۶.۲ می‌توان با استفاده ازقضیهٔ فوق برگشت‌پذیربودن حالتهای سیستم را بررسی کرد.

درمورد حالت ۳

$$P_{33} = 0/3$$

$$P_{33}^{(2)} = P_{31}P_{13} + P_{32}P_{23} + P_{33}P_{33} + P_{34}P_{43} = 0/09$$

$$P_{33}^{(3)} = (0/3)^3$$

$$\vdots$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{33}^{(n)} = \frac{0/3}{1 - 0/3} = \frac{3}{7}$$

درنتیجه حالت ۳ گذراست. به‌همین‌ترتیب، می‌توان نشان دادکه سایرحالتها برگشت‌پذیر هستند.

قضیهٔ ۴.۴ در یك زنجیرهٔ مارکوف با تعداد متناهی حالتها، تمام حالتهای آن نمی‌تواند گذرا باشد.

اثبات: فرض کنیدکه تعداد حالات این زنجیره متناهی و برابربا M و همگی گذرا باشد. یکی ازحالتها، مثلا ۱، را درنظر بگیرید. بعد ازمدتی متناهی، فرضاً t_1، سیستم دیگر هرگز به ۱ برنمی‌گردد. به‌همین ترتیب، بعد ازمدتی، مثلا t_2، سیستم نمی‌تواند به‌حالت ۲ برسد. بنابراین، بعد از گذشت‌مدت‌زمان معینی، سیستم به‌هیچ‌کدام ازحالتها برنمی‌گردد، که‌این امکانپذیر نیست. پس تعدادی از حالتهای سیستم اجباراً باید برگشت‌پذیر باشد.

قضیهٔ ۵.۴ اگر $i \leftrightarrow j$ و i برگشت‌پذیر باشد، j نیز برگشت‌پذیر خواهد بود.

اثبات: چون i و j با هم مرتبط هستند، پس دوعدد صحیح مثلا m و m' می‌توان یافت که رابطه‌های زیر درمورد آنها برقرار باشد.

$$P_{ij}^{(m')} > 0 \quad , \quad P_{ji}^{(m)} > 0 \qquad (۱۸.۲)$$

بنابراین، با استفاده از معادلهٔ $C-K$، رابطهٔ زیر به‌ازای تمام مقادیر $n \geq m + m'$ صادق است.

$$P_{jj}^{(n)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(n-m-m')} P_{ij}^{(m')}$$

بنابراین،

$$\sum_{n=m+m'}^{\infty} P_{jj}^{(n)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ij}^{(m')} \sum_{n=m+m'}^{\infty} P_{ii}^{(n-m-m')} \qquad (۱۹.۲)$$

اما چون i برگشت‌پذیر و اعداد m و m' اعدادی مشخص و متناهی هستند. لذا

$$\sum_{n=m+m'}^{\infty} P_{ii}^{(n-m-m')} = \infty$$

درنتیجه، عبارت (۱۹.۲) نیز بینهایت و j برگشت‌پذیراست.

قضیهٔ ۶.۴ اگر $i \leftrightarrow j$ و i گذرا باشد، دراین صورت j نیز گذراست.

اثبات: اگر j برگشت‌پذیر باشد، طبق قضیهٔ قبلی i هم برگشت‌پذیر خواهد بود و این خلاف فرض است.

قضیهٔ ۷.۴ در یك زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه با تعداد حالات متناهی، تمام حالتها برگشت‌پذیر هستند.

اثبات: طبق دوقضیهٔ قبل، تمام‌حالتها باید یابرگشت‌پذیر ویا گذرا باشند. ازطرف دیگر، می‌دانیم دریك زنجیرهٔ مارکوف با تعداد حالات متناهی، تمام آنها نمی‌توانند گذرا باشند، پس همه برگشت‌پذیرهستند.

تعریف. میانگین تعداد مراحلی که طول می‌کشد تا سیستم ازحالت i شروع کند و مجدداً به i برگردد، را با M_i نشان می‌دهند وبه‌آن میانگین زمان برگشت می‌گویند. با این تعریف، حالت برگشت‌پذیر را به دو گروه تقسیم می‌کنیم:

الف. **برگشت‌پذیر مثبت** اگر $M_i < \infty$ باشد

ب. **برگشت‌پذیر تهی** اگر $M_i = \infty$ باشد

قضیهٔ ۸.۴ اگر $j \leftrightarrow i$ و i برگشت‌پذیر مثبت باشد، j نیز برگشت‌پذیر مثبت خواهد بود.

ضمناً دریك سیستم با تعداد حالات متناهی، تمام حالتهای آن برگشت‌پذیر مثبت هستند.

تعریف: اگر سیستم از i شروع کند و بعداً فقط در مراحل d ،$2d$ و $3d$ و... بتواند به i برگردد، می‌گوییم حالت i دارای **دوره** برابر با d است. بدین‌ترتیب، به‌ازای تمام مقادیر عدد صحیح n، به استثنای $n=d, 2d, 3d$ رابطهٔ $P_{ii}^{(n)}=0$ برقرار است. درحالت خاص، اگر $d=1$، اصطلاحاً می‌گوییم i نادوره‌ای است.

...

۴.۴ احتمالات حدی در زنجیره‌های مارکوف

یکی از ویژگیهای زنجیره‌های مارکوف این است که تحت شرایطی، حالت سیستم در دراز مدت مستقل از حالت اولیهٔ آن است. برای روشن شدن این موضوع، $P_{ik}^{(m)}$ و $P_{jk}^{(m)}$ را درنظر بگیرید. این دومقدار درحالت کلی با یکدیگر متفاوت هستند. به‌عبارت دیگر، احتمال اینکه سیستم در m مرحلهٔ دیگر به حالت k برسد، بستگی به‌حالت فعلی آن دارد. اما تحت شرایطی، هرچه m افزایش یابد، مقادیر احتمالات فوق به یکدیگر نزدیکتر و درنهایت یکی‌می‌شوند. درنتیجه، صرف‌نظرازاینکه سیستم از چه‌حالتی شروع کند، احتمال اینکه در درازمدت به‌حالت k برسد، مقداری ثابت است که این مقدار را به π_k نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، سیستم از هرحالتی، مثلا i شروع کند، خواهیم داشت:

$$\pi_k=\lim_{m\to\infty} P_{ik}^{(m)} \qquad (۲۰.۴)$$

به‌همین ترتیب، بدیهی است که اگر حرکت سیستم در درازمدت مستقل ازحالت شروع آن باشد، رابطهٔ زیر نیز صدق می‌کند.

$$\pi_k=\lim_{n\to\infty} P(X_n=k)=\lim_{n\to\infty}\pi_k^{(n)} \qquad (۲۱.۴)$$

مثال ۷.۴ زنجیرهٔ مارکوف زیررا درنظر بگیرید.

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

ماتریسهای گذار ۲ و ۴ و ۸ مرحله‌ای این زنجیرهٔ مارکوف عبارت است از:

$$\mathbf{P}^{(2)}=\begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \\ 0.36 & 0.64 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(4)}=\begin{bmatrix} 0.4432 & 0.5568 \\ 0.4176 & 0.5824 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(8)}=\begin{bmatrix} 0.4289 & 0.5711 \\ 0.4283 & 0.5717 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، صرف‌نظر ازاینکه ازچه حالتی شروع کرده‌ایم، به‌تدریج سطرهای ماتریس به یکدیگر نزدیك می‌شوند. به‌عبارت دیگر، صرف‌نظر از اینکه از چه حالتی شروع کرده باشیم، درنهایت با احتمال ثابتی به حالتهای ۱ یا ۲ می‌رسیم. بدین‌ترتیب، در چنین حالتی‌که **احتمالات حدی** وجود داشته باشد، موقعی‌که $n \to \infty$، ماتریس $\mathbf{P}^{(n)}$ هم به ماتریسی میل می‌کند، که تمام عناصر هرستون آن، مثلا ستون j ام، برابر با π_j باشد.

دراین بخش با استفاده از قضایای زیر، شرایط وجود احتمالات حدی دریك سیستم و همچنین نحوهٔ محاسبهٔ آنها را درسیستمهای یکپارچه و نادوره‌ای، سیستمهای یکپارچه با دورهٔ d وسپس سیستمهای غیر یکپارچه بررسی می‌کنیم.

قضیهٔ ۹.۴ یك زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه با حالتهای نادوره‌ای را درنظر بگیرید. دراین زنجیرهٔ مارکوف،

الف. احتمالات حدی همیشه وجود دارد، یعنی صرف‌نظرازاینکه سیستم ازچه‌حالتی شروع کند، در درازمدت با احتمال ثابت π_j به‌حالت j گذر می‌کند.

ب. اگر حالتهای سیستم برگشت‌پذیر مثبت باشد، به‌ازای تمام حالتها π_j عددی مثبت است.

ج. اگر حالتهای سیستم گذرا ویا برگشت‌پذیر تهی باشند. به‌ازای تمام حالتها، π_j برابر با صفر است.

قضیهٔ ۱۰.۴ دریك سیستم یکپارچه با حالتهای برگشت‌پذیر مثبت و نادوره‌ای (که آن را همه سویی می‌نامند) مقادیر احتمالات حدی π_j با حل دستگاه معادلات زیر به‌دست می‌آید:

$$\pi_j=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i \; P_{ij}, \; j=0, 1, 2, \ldots \qquad (۲۲.۴)$$

یا

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots)=(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)\cdot p \qquad (۲۳.۴)$$

و

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i=1 \qquad (۲۴.۴)$$

که P ماتریس انتقال زنجیرهٔ مارکوف است. مقادیر π_j را، که از روابط (۲۳.۲) و (۲۲.۲) به‌دست می‌آید، اصطلاحاً توزیع ثابت زنجیرهٔ مارکوف نیز می‌گویند. (باید توجه داشت که دستگاه معادلات (۲۳.۲) و (۲۲.۲) دارای یک معادلهٔ زاید است و لذا پس از حذف یکی از معادلات، (۲۳.۲) تعداد معادلات و مجهولها برابر خواهد شد).

مثال ۸.۲ زنجیرهٔ مارکوف مثال ۷.۲ را درنظر بگیرید. این سیستم یکپارچه و نادوره‌ای است. ضمناً چون تعداد حالتهای آن متناهی است، لذا تمام حالتها برگشت‌پذیر مثبت هستند. احتمالات حدی را می‌توان طبق قضیهٔ ۹.۲ محاسبه کرد، یعنی

$$(\pi_1,\pi_2)=(\pi_1,\pi_2)\begin{bmatrix}0.2 & 0.8\\ 0.6 & 0.4\end{bmatrix}$$

و

$$\pi_1+\pi_2=1$$

از حل معادلات فوق نتیجه می‌شود که: $\pi_1=0.4286$ و $\pi_2=0.5714$. می‌بینیم که در محاسبات مستقیم مثال ۷.۲ نیز، احتمالات حدی به این اعداد نزدیک می‌شوند. π_1 و π_2 به‌ترتیب معرف درصدی از اوقات است که سیستم در دراز مدت در حالت ۱ یا ۲ توقف می‌کند.

احتمالات حدی در زنجیره‌های مارکوف با دورهٔ d

در این مورد نیز، حالت سیستم در درازمدت بستگی به‌حالت شروع آن ندارد. لیکن، چنانچه $n\to\infty$، کمیت $p_{ij}^{(n)}$ مقدار ثابتی نخواهد داشت، بلکه گاهی مقدار آن صفر و گاهی π_j است. به‌عبارت دقیقتر، مقدار حد احتمال فوق بستگی به n دارد. اگر n را برابر $md+k$ نشان دهیم (که m عددی صحیح است و $k=0,1,\dots,d-1$)، $\lim\limits_{m\to\infty} p_{ij}^{(md+k)}$ به‌ازای $k=0$ برابر π_j و به‌ازای بقیهٔ مقادیر آن برابر با صفر خواهد بود. برای روشن شدن این موضوع، لازم به یادآوری است که براساس تعریف، اگر در زمان شروع (مرحلهٔ صفر)، حالت سیستم مثلاً j باشد، فقط در مراحل d، $2d$، $3d$ و ... سیستم می‌تواند به j برگردد. بدیهی است در مراحل دیگر، مثلاً در $1, d+1, 2d+1, \dots$ نیز سیستم به حالتهای دیگری غیر از j خواهد رفت.

به‌این ترتیب، اگر حد ماتریس $P^{(n)}$ را به‌دست آوریم، به‌جای یک ماتریس، دارای d ماتریس حدی خواهیم بود، که در هر ماتریس فقط تعدادی از عناصر سطر i ام برابر با π_i و بقیه صفر خواهد بود (بستگی به‌حالت در مرحلهٔ شروع دارد). برای به‌دست آوردن مقادیر π_i از قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۱.۲ در یک زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه با دورهٔ d، مقدار احتمالات حدی π_j را می‌توان از رابطه‌های زیر به‌دست آورد:

$$(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\dots)=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\dots)\cdot P \qquad (25.2)$$

و

$$\sum_k \pi_k = d \qquad (26.2)$$

نکتهٔ قابل توجه در این قضیه این است که مجموع احتمالات حدی، به‌جای اینکه برابر با یک باشد برابر با d است. علت این امر این است که درمرحلهٔ $(md+k)$، سیستم فقط می‌تواند تعداد مشخصی از حالتها را انتخاب کند. درنتیجه $\sum_i \pi_i=1$ فقط مربوط به‌حالتهای i است، که امکان رسیدن به‌آنها در این مرحله وجود دارد و با توجه به‌اینکه d نوع ماتریس حدی وجود دارد، لذا $\sum_i\pi_i=d$ نیز صادق است.

مثال ۹.۲ زنجیرهٔ مارکوف زیر را درنظر بگیرید.

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.25 & 0.75\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

این زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه، دارای دوره‌ای برابر با ۳ است (این موضوع را تحقیق کنید). فرض کنید که در شروع کار، سیستم در حالت ۲ باشد. درمرحلهٔ دوم، این سیستم با احتمال ۱ به‌حالت ۱ می‌رود. در مرحلهٔ سوم (به‌ترتیب با احتمالهای ۰٫۲۵ و ۰٫۷۵) به‌یکی از حالتهای سه و چهار گذر می‌کند. در مرحلهٔ چهارم مجدداً به‌حالت ۲ برمی‌گردد و این کار مرتب ادامه پیدا می‌کند. بدین‌ترتیب، درمورد حالت ۱ خواهیم داشت: $\pi_1=1$؛ زیرا این سیستم درمراحل دوم، پنجم وهشتم و... بااحتمال ۱ به‌این حالت می‌رسد و در سایر مراحل امکان دسترسی به این حالت برای آن وجود ندارد. به همین ترتیب، $\pi_2=1$، $\pi_3=0.25$، $\pi_4=0.75$. همین نتایج را می‌توان از قضیهٔ ۱۱.۲ نیز به‌دست آورد. ماتریسهای حدی این زنجیرهٔ مارکوف عبارت‌اند از:

$$\lim_{m\to\infty}\mathbf{P}^{3m}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}^{(3m+1)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(3n+2)}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همان طور که ماتریسهای فوق نشان می‌دهند، درهمهٔ آنها، مثلاً $\pi_4 = 1/4$ است. یعنی، صرف‌نظر از حالت شروع، سیستم درهر d مرحله یك‌بار با احتمال ۱/۴ به‌حالت ۳ می‌رسد. چنانچه ازحالت ۳ یا ۴ شروع کنیم، درمراحل ۳، ۶، $3m$،... واگر ازحالت ۱ شروع کنیم، درمراحل ۱، ۴، ۷ و $3m+1$،... واگر ازحالت ۲ شروع کنیم در مراحل ۲، ۵ و ۸ و $3m+2$ می‌توانیم به این حالت برسیم. ماتریسهای حدی، این موضوع را نشان می‌دهند.

باتوجه به تعریف M_j، که قبلا ارائه شد، این کمیت معرف میانگین تعداد مراحلی است که طی آن سیستم از j شروع می‌کند و مجدداً به j می‌رسد. دردرازمدت رابطهٔ بین M_j واحتمالهای حدی را می‌توان از قضیهٔ زیر به‌دست‌آورد.

قضیهٔ ۱۲.۴ در یك زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه، رابطهٔ زیر به‌ازای تمام مقادیر j صادق است

$$\pi_j=\frac{d}{M_j} \qquad (27.4)$$

(d می‌تواند یك نیز باشد، یعنی حالتها بدون دوره باشند)

مثال ۱۰.۴ درزنجیرهٔ مارکوف مثال ۹.۴ مقادیر M_j را به‌دست‌آورید.

حل: براساس رابطهٔ (۲۷.۴)،

$$M_1=M_2=\frac{3}{1}=3$$

$$M_3=\frac{3}{0.25}=12$$

$$M_4=\frac{3}{0.75}=4$$

می‌توانیم این مقادیر را مستقیماً نیز به‌دست‌آوریم، که:

$$M_i=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot P(T_i=n)$$

که $T_j =$ تعداد مراحلی است که در راه داریم تا از j شروع کنیم ومجدداً به j برگردیم. به‌عنوان نمونه:

$$P(T_1=3)=1$$

و

$$P(T_1=n)=0 \quad , \quad n\neq 3$$

درنتیجه

$$M_1=3$$

وبه‌ازای تمام مقادیر m

$$P(T_3=3m)=\left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

و به‌ازای تمام مقادیر n که مضربی از ۳ نباشد،

$$P(T_3=n)=0$$

درنتیجه،

$$M_3=\sum_{m=1} 3m\cdot P(T_3=3m)=12$$

احتمالات حدی درزنجیره‌های مارکوف غیریکپارچه

اگرسیستم یکپارچه نباشد، عملا هر کلاس‌آن می‌تواند نقش یك‌زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه را بازی کند. فرض کنیدکه درحالت i باشیم. دوحالت ممکن است اتفاق بیفتد. اول اینکه i گذرا باشد. دراین‌صورت سیستم درنهایت ازاین حالت وکلاس مربوط به‌آن خارج می‌شود وهرگز به‌آن برنمی‌گردد. که‌دراین‌حال $\pi_i = 0$ است. لیکن چنانچه i برگشت‌پذیر (اعم ازمثبت یا تهی) باشد، سیستم ازاین مرحله فقط وارد حالتهایی می‌شودکه با i مرتبط باشد وهرگز از کلاس مربوط به‌این حالت خارج نمی‌شود. به‌عبارت دیگر، بقیهٔ حالتها عملا حذف می‌شوند و در واقع با یك زنجیرهٔ مارکوف کوچکتر ولی یکپارچه سروکار خواهیم داشت وروابطه‌های مربوط به‌سیستمهای یکپارچه را می‌توان اعمال‌کرد.

۵.۴ زنجیره‌های مارکوف با زمان پیوسته

همان‌طورکه در ابتدای این فصل گفتیم، دریك فرایند مارکوف هم پارامتر t وهم حالت سیستم $X(t)$ می‌توانند یا گسسته ویا پیوسته باشند. دریك زنجیرهٔ مارکوف هردو عامل‌فوق

گسسته هستند (و به‌همین دلیل، به‌آنها زنجیره‌های مارکوف بازمان گسسته نیز می‌گویند). **زنجیره‌های مارکوف بازمان پیوسته**، حالت خاصی از فرایند مارکوف هستند، که در آنها پارامتر t پیوسته است، اما فرض می‌شود که $X(t)$، حالت سیستم، همچنان گسسته است. در زنجیره‌های مارکوف با زمان گسسته، فرض می‌شود که تغییر حالت سیستم فقط در انتهای هر مرحله صورت می‌گیرد (و یا اینکه فقط در انتهای هر مرحله حالت سیستم مشاهده می‌شود)، در حالی که در زنجیره‌های مارکوف با زمان پیوسته، چنین محدودیتی وجود ندارد و در نتیجه، حالت سیستم می‌تواند در هر لحظه تغییر کند.

تعریف. فرایند مارکوف $\{X(t), t \geqslant 0\}$ را زنجیرهٔ مارکوف با زمان پیوسته (یا به اختصار زنجیره‌های مارکوف پیوسته) می‌نامند، اگر به‌ازای تمام مقادیر s و t رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$P[X(t+s)=j|X(s)=i,\ X(u)=x(u),\ u\leqslant s] \qquad (۲۸.۴)$$
$$=P[X(t+s)=j|X(s)=i]$$

اگر رابطهٔ فوق مستقل از s باشد، این گونه زنجیرهٔ مارکوف را **همگن** می‌نامند. به‌عبارت دیگر، احتمال انتقال سیستم از یک حالت به‌حالت دیگر، به‌ازای تمام مقادیر i و j و t از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$P_{ij}(t)=P[X(t+s)=j|X(s)=i]=P[X(t)=j|X(0)=i] \qquad (۲۹.۴)$$

به‌این ترتیب، $P_{ij}(t)$ احتمال گذار سیستم از حالت i به j در مدت t است (در این فصل، تنها به‌بررسی زنجیره‌های مارکوف **پیوستهٔ همگن** می‌پردازیم).

شکل ۱.۴ حرکت سیستم به حالتهای گوناگون را نسبت به‌زمان نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در هر لحظه اززمان، سیستم می‌تواند یکی از حالتهای ممکن را انتخاب کند. درهر حالت، سیستم مدتی متوقف و سپس به‌حالت دیگر گذر می‌کند. مدت زمان توقف درهر حالت متغیری تصادفی است.

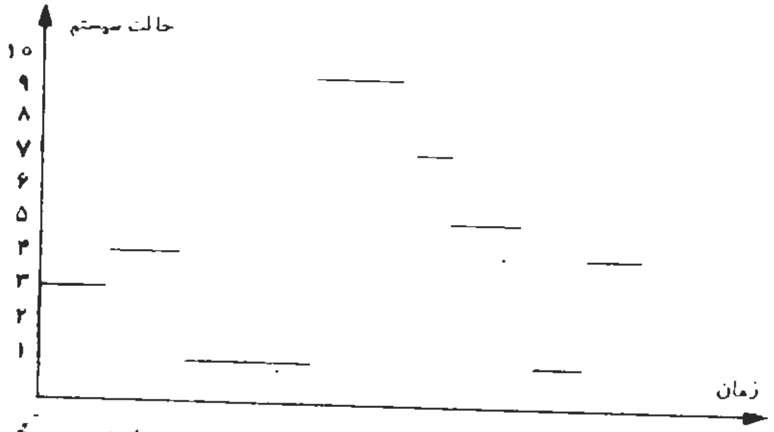
مثال ۱۱.۴ هر فرایند پواسون، یک زنجیرهٔ مارکوف با زمان پیوسته است، زیرا بر اساس خاصیت رشد مستقل، تعداد پیشامدها درفاصلهٔ زمانی (s) تا $(t+s)$، مستقل از تعداد مشتریهایی است که تا لحظهٔ s وارد شده‌اند. دراین فرایند، رابطهٔ (۲۹.۴) به‌شرح زیر خواهد بود:

اگر $i \leqslant j$ باشد،

$$P_{ij}(t)=P[\text{تعداد پیشامدها درمدت زمان } t = j-i]=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

اگر $i>j$ باشد،

$$P_{ij}(t)=0$$



شکل ۱.۴ گذار سیستم به‌حالتهای مختلف نسبت به‌زمان در یک زنجیرهٔ مارکوف پیوسته

تابع توزیع مدت‌زمان توقف در یک حالت

موقعی که سیستم وارد حالتی می‌شود، تا مدتی در آن حالت می‌ماند وسپس به‌حالت دیگری گذر می‌کند. اگر مدت‌زمانی که سیستم درحالت i می‌ماند را با T_i نشان دهیم، این متغیر تصادفی دارای توزیع‌نمایی است. علت این امر را می‌توان به‌شرح زیر بیان کرد:

فرض کنید که سیستم در لحظه‌ای که آن را لحظهٔ صفرمی‌نامیم، وارد حالت i شده و تا لحظهٔ s از آن حالت خارج نشده باشد. با توجه به‌خاصیت مارکوفی این فرایند، روند حرکت آیندهٔ آن مستقل از مدت زمانی است که سیستم در حالت i گذرانیده است. لذا، احتمال اینکه درفاصلهٔ زمانی s تا $t+s$، سیستم همچنان درحالت i باقی بماند، برابر است با احتمال اینکه حالت سیستم ازاین لحظه، به‌مدت t، تغییر نکند. بنابراین

$$P(T_i>t+s|T_i>s)=P(T_i>t) \qquad (۳۰.۴)$$

از طرف دیگر، طبق قضیهٔ ۱.۳، تنها متغیر تصادفی با خاصیت فوق، دارای توزیع‌نمایی با پارامتر $f_{T_i}(0)$ است. مقدار این پارامتر را بعداً محاسبه خواهیم کرد.

ماتریس گذار و ماتریس آهنگ‌گذار

درمورد زنجیره‌های مارکوف پیوسته، دو نوع ماتریس را درمورد گذار حالتها می‌توان معرفی کرد، یکی از آنها، که **ماتریس گذار** نامیده و با $\mathbf{P}(t)$ نشان داده می‌شود، دارای همان مفهوم ماتریس انتقال درزنجیره‌های مارکوف گسسته است. هر عنصر این ماتریس، $P_{ij}(t)$، معرف احتمال گذار سیستم از i به j درمدت t است. به‌این ترتیب، این ماتریس خودتابعی ازپارامتر t خواهد بود.

حالت خاص این ماتریس، $P(0)$، باتوجه به‌عناصر تشکیل‌دهندهٔ آن به‌شرح زیر است:

$$P_{ii}(0)=1$$

به‌ازای $i \# j$ ،

$$P_{ij}(0)=0$$

بنابراین، این ماتریس به‌شکل **ماتریس یکه** درمی‌آید، یعنی:

$$P(0)=I$$

ماتریس دیگری که می‌تواند گذار حالتها را بیان کند، **ماتریس آهنگ گذار** است، که با $\mathbf{Q}$ نشان داده می‌شود. عناصر تشکیل دهندهٔ این ماتریس، q_{ij}، به‌شرح زیر تعریف می‌شود:

الف. اگر $j \# i$ باشد،

$$q_{ij}=\lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)}{t}=\frac{d}{dt}P_{ij}(t) \qquad (۳۱.۲)$$

با درنظر گرفتن اینکه $P_{ij}(t)$ معرف احتمال تغییر حالت سیستم از i به j در مدت‌زمان t است، q_{ij} نشاندهندهٔ آهنگ تغییرحالت سیستم از i به j خواهد بود.

ب. اگر $j=i$ ،

$$q_{ii}=-\sum_{i\neq j}q_{ij} \qquad (۳۲.۲)$$

ازطرف دیگر، رابطهٔ (۳۲.۲) را با کمك رابطهٔ (۳۱.۲) می‌توان به‌شرح زیر بیان کرد:

$$q_{ii}=-\sum_{j\neq i}\frac{d}{dt}P_{ij}(t)=\frac{d}{dt}[-1+P_{ii}(t)]=\frac{d}{dt}P_{ii}(t) \qquad (۳۳.۲)$$

به‌این ترتیب، عناصر قطری ماتریس $\mathbf{Q}$ همگی منفی هستند ومجموع عناصر هرسطر برابر با صفر خواهد بود.

باتوجه به‌رابطهٔ (۳۴.۲)، $(-q_{ii})$ معرف آهنگ تغییر حالت از i به مجموعهٔ حالتهای دیگر و q_{ii} معرف آهنگ ماندن سیستم در i است.

مثال ۱۱.۴ را مجدداً درنظر بگیرید. ماتریس آهنگ گذار این زنجیرهٔ مارکوف، درسطر i عبارت است از:

$$q_{ij}=0 \quad . \quad j\geqslant i+2 \;\text{یا}\; j<i$$

$$q_{i,i+1}=\lambda$$

$$q_{i,i}=-\lambda$$

ارتباط ماتریس آهنگ گذار با ماتریس گذار را می‌توان با استفاده از رابطهٔ زیر مشخص ساخت.

$$\mathbf{Q}=\lim_{t\to 0}\frac{P(t)-I}{t}=\frac{d}{dt}P(t)\Big|_{t=0} \qquad (۳۴.۲)$$

محاسبهٔ پارامتر تابع توزیع T_i

همان‌طور که قبلا گفتیم T_i دارای توزیع‌نمایی با پارامتر $f_{T_i}(0)$ است. از طرف دیگر طبق خاصیت «د» توزیع‌نمایی، پارامتر آن معرف آهنگ وقوع پیشامد موردنظراست. لذا پارامتر متغیر تصادفی T_i برابر با $(-q_{ii})$ خواهدبود. به‌این ترتیب،

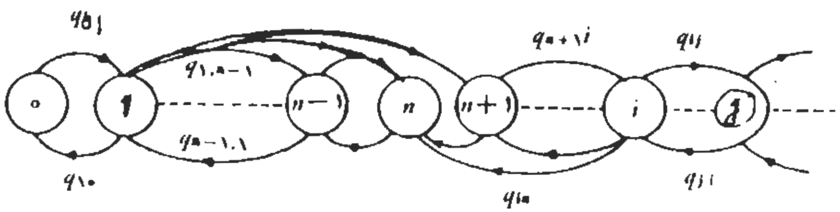
$$P(T_i>x)=e^{q_{ii}x} \quad e^{q_{ii}x}$$

نمودار آهنگ

رابطهٔ بین حالتهای یك سیستم مارکوفی را می‌توان بـا **نمودارآهنگ** نشان داد. دراین نمودار، گرهها معرف حالت سیستم وشاخه‌ها نشاندهندهٔ امکان‌گذار ازهرحالت به‌حالتهای دیگر است. اندازه‌های روی شاخه‌ها، q_{ij}، بـراساس تعریف فوق، نشاندهندهٔ آهنگ تغییر حالت سیستم از i به j است. درنمودار آهنگ، q_{ii} ها نشان داده‌نمی‌شوند.

معادلهٔ C-K

دراینجا نیزشبیه زنجیره‌های مارکوف گسسته، رابطه‌ای به‌شکل زیر، درمورد همهٔ حالتهای i و j وزمانهای t_1 و t_2 صدق می‌کند.



شکل ۲.۴ نمودار آهنگ یك سیستم مارکوف.

قضیهٔ ۱۳.۴

$$P_{ij}(t_1+t_2)=\sum_k P_{ik}(t_1)P_{kj}(t_2) \qquad (۳۵.۴)$$

اثبات:

$$P_{ij}(t_1+t_2)=P[X(t_1+t_2)=j|X(0)=i]=\sum_k P[X(t_1+t_2)=j|$$

$$X(t_1)=k,\ X(0)=i]P[X(t_1)=k|X(0)=i]$$

ازطرف دیگر، طبق خاصیت مارکوفی

$$P[X(t_1+t_2)=j|X(t_1)k,\ X(0)=i]=$$

$$P[X(t_1+t_2)=j|X(t_1)=k]=P_{kj}(t_2)$$

وهمچنین

$$P[X(t_1)=k|X(0)=i]=P_{ik}(t_1)$$

معادلهٔ $C\text{-}K$ را می‌توان به‌صورت ماتریسی و به شکل زیرنیز نوشت:

$$P(t_1+t_2)=P(t_1)\times P(t_2) \qquad (۳۶.۴)$$

نحوهٔ محاسبهٔ $P(t)$ معادلات پیشرو و پسرو

طبق رابطهٔ (۳۴.۴)، می‌توان $\mathbf{Q}$ را از $P(t)$ به‌دست‌آورد. اما درعمل معمولاً $\mathbf{Q}$ را به‌سادگی وبراساس اطلاعات مربوط به‌ساختارزنجیرهٔ مارکوف می‌توان مشخص ساخت، درحالی‌که به‌دست آوردن $P(t)$ به‌طور مستقیم مشکل یا غیرممکن است. لذا، ضرورت داردکه $P(t)$ با استفاده از $\mathbf{Q}$ محاسبه شود. برای انجام این‌کاررابطهٔ (۳۶.۴) را مجدداً درنظربگیرید. اگر ازطرفین نسبت به t_2 مشتقگیری کنیم، چنین نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial P(t_1+t_2)}{\partial t_2}=P(t_1)\frac{\partial P(t_2)}{\partial t_2}$$

دررابطهٔ فوق، مقدار t_2 را برابر با صفر و t_1 را برابر t انتخاب می‌کنیم. چنانچه رابطهٔ (۳۴.۴) را هم درنظربگیریم، نتیجه‌می‌شود که

$$\frac{dP(t)}{dt}=P(t)\cdot Q \qquad (۳۷.۴)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل فوق به‌نام **معادلات پیشرو** $C\text{-}K$ موسوم است.

درمحاسبات فوق، اگر ازرابطهٔ (۳۶.۴) نسبت به t_1 مشتقگیری کنیم، به جای رابطهٔ (۳۷.۴) رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید، که «معادلهٔ پسرو $C\text{-}K$» نامیده می‌شود.

$$\frac{dP(t)}{dt}=\mathbf{Q}\cdot P(t) \qquad (۳۸.۴)$$

مثال ۱۲.۴ ماشینی را درنظر بگیریدکه یا درحال کارکردن ویا درتعمیرگاه تحت تعمیراست. فرض می‌کنیم مدت‌زمان کار این‌ماشین متغیری تصادفی با توزیع‌نمایی و پارامتر λ ومدت تعمیرنیزدارای توزیع‌نمایی با پارامتر μ است. اگر درلحظهٔ صفرماشین مشغول کار باشد، احتمال اینکه درلحظهٔ $t=15$ نیز درحال کارکردن باشد، چقدراست؟

حل: سیستم دارای دوحالت مشغول به‌کار (۱) و درحال تعمیر (۲) است. ماتریس آهنگ‌گذار این سیستم دارای اجزای زیراست:

$$q_{12}=\lambda \qquad q_{21}=\mu$$

$$q_{11}=-\lambda \quad q_{22}=-\mu$$

پس

$$\begin{bmatrix} \frac{dP_{11}(t)}{dt} & \frac{dP_{12}(t)}{dt} \\ \frac{dP_{21}(t)}{dt} & \frac{dP_{22}(t)}{dt} \end{bmatrix}=\mathbf{Q}\cdot P(t)=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix}$$

یا

$$\frac{dp_{11}(t)}{dt}=-\lambda[p_{11}(t)-p_{21}(t)]$$

$$\frac{dp_{21}(t)}{dt}=\mu[p_{11}(t)-p_{21}(t)]$$

اولی را در μ ودومی را در λ ضرب و باهم جمع می‌کنیم

$$\mu\frac{dp_{11}(t)}{dt}+\lambda\frac{dp_{21}(t)}{dt}=0$$

انتگرال می‌گیریم:

$$\mu p_{11}(t)+\lambda p_{21}(t)=C$$

با توجه به‌شرایط‌اولیه، $p_{11}(0)=1$ و $p_{21}(0)=0$ نتیجه می‌شود که، $C=\mu$ ودرنتیجه

$$\lambda p_{21}(t)=\mu[1-p_{11}(t)]$$

این رابطه را در اولین معادلهٔ دیفرانسیل فوق قرار می‌دهیم. در نتیجه

$$\frac{dp_{11}(t)}{dt}=-(\lambda+\mu)p_{11}(t)+\mu$$

یا

$$\frac{1}{\lambda+\mu}\frac{dp_{11}(t)}{dt}=-\left[p_{11}(t)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]$$

در نتیجه،

$$\frac{dp_{11}(t)}{p_{11}(t)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}}=-(\lambda+\mu)dt$$

$$Ln\ \log_e\left[p_{11}(t)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]=-(\lambda+\mu)t+\log_e C\ Ln$$

یا

$$p_{11}(t)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}=Ce^{-(\lambda+\mu)t}$$

بر اساس شرایط اولیه $Pii(0)=1$، در نتیجه

$$1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}=C$$

و

$$C=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

و به‌این ترتیب،

$$P_{11}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

در این مسئله، پیدا کردن $P_{11}(15)$ مدنظر است، پس

$$P_{11}(15)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-15(\lambda+\mu)}$$

۵۶

تبدیل زنجیره‌های مارکوف با زمان پیوسته به زنجیرهٔ مارکوف معمولی

همان‌طور که گفته شد تفاوت دو زنجیرهٔ مارکوف فوق در این است که در زنجیرهٔ مارکوف گسسته تغییر حالتها در واحد زمان بررسی می‌شود، در حالی که در زنجیرهٔ مارکوف پیوسته، زمانی که سیستم در یك حالت می‌ماند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. حال اگر در زنجیرهٔ مارکوف پیوسته، واحد زمان را مدت زمانی بدانیم که سیستم در یك حالت می‌ماند، می‌توان آن را به زنجیرهٔ مارکوف گسسته تبدیل کرد. در این صورت، اجزای ماتریس انتقال آن به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{P}_{ii}=0 \qquad (۳۹.۲)$$

$$\mathbf{P}_{ij}=\left(\frac{-1}{q_{ii}}\right)q_{ij} \qquad (۴۰.۲)$$

(۴ـ۲)

(برای اثبات رابطهٔ (۳۹.۲)، به مثال شمارهٔ ۴.۲ (فصل ۲ مراجعه شود).

مثال ۱۳.۴ فرایند پواسون را مجدداً درنظر بگیرید. اگر حالت سیستم n باشد، یعنی اینکه تا این لحظه n پیشامد اتفاق افتاده است. همان‌طور که گفته شد، این فرایند یك زنجیرهٔ مارکوف پیوسته است. اگر واحد زمان را زمان بین دو پیشامد درنظر بگیریم، به زنجیرهٔ مارکوف گسسته با ماتریس گذار زیر تبدیل می‌شود:

$$P_{nn}=0$$

$$P_{n,n+1}=1$$

$$P_{nj}=0\ ,\ j\neq n+1$$

۶.۴ روابط حدی در زنجیرهٔ مارکوف با زمان پیوسته

در اینجا نیز می‌خواهیم تابع توزیع حالت سیستم را در درازمدت، ($t\to\infty$) تعیین کنیم. قضیهٔ زیر که مشابه آن در زنجیرهٔ مارکوف گسسته ارائه شد، می‌تواند روابط حدی را در حالت پایدار به‌دست‌آورد.

قضیهٔ ۱۴.۴ اگر سیستم یکپارچه باشد، در این صورت، حد $P_{ij}(t)$ به‌سمت عددی میل می‌کند که آن را π_j می‌نامیم، یعنی

$$\lim_{t\to\infty}P_{ij}(t)=\pi_j$$

ضمناً اگر تمام حالات برگشت‌پذیر مثبت باشند، که در این‌صورت سیستم را ارگودیك (*Ergodic*) می‌نامند، مقدار احتمالات حدی نیز از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\sum_i \pi_i q_{ij}=0 \quad , \quad j=1,2,\ldots\ldots \qquad (۴۱.۲)$$

و

$$\sum_j \pi_j = 1 \qquad (۴۲.۴)$$

رابطهٔ (۴۱.۴) را به‌شکل ماتریس زیر می‌توان نشان داد:

$$[\pi_1, \pi_2, \cdots\cdots]\mathbf{Q} = 0 \qquad (۴۳.۴)$$

دراینجا $\mathbf{Q}$ ماتریس آهنگ گذار و π_j معرف درصدی از زمان است که سیستم درحالت j می‌ماند.

استفاده از نمودار آهنگ برای محاسبهٔ روابط حدی

رابطهٔ (۴۱.۴) را می‌توان با کمك نمودار آهنگ نیز به‌دست آورد. برای هرحالت، مثلا i، رابطهٔ فوق را به‌شکل زیر درمی‌آوریم:

$$\pi_i q_{ii} = \sum_{j \neq i} \pi_j q_{ji} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots$$

اما می‌دانیم که

$$q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$$

درنتیجه

$$\sum_{j \neq i} \pi_i q_{ij} = \sum_{j \neq i} \pi_j q_{ji} \qquad (۴۴.۴)$$

جملات سمت‌چپ مربوط به‌آهنگ گذار خروجی از i به‌بقیهٔ حالتها وجملات سمت‌راست مربوط به‌آهنگ گذار ازسایر حالتها به i است. هرجمله حاصل‌ضرب دو کمیت است، اولی آهنگ گذار ازیك حالت به‌حالت دیگر، q_{ij}، ودیگری احتمال بودن سیستم درحالت مبدأ، π_j، است. بدیهی است که، باتوجه به‌اینکه رابطهٔ (۴۱.۴) برای به‌دست‌آوردن روابط حدی است، مقادیر احتمالات موردنظر نیز مربوط به‌درازمدت خواهد بود.

به‌این‌ترتیب، برای محاسبهٔ روابط حدی می‌توان ازنمودار آهنگ استفاده‌کرد. برای این‌منظورمجموع $\pi_n q_{nm}$ های خروجی و ورودی هرحالت را مساوی یکدیگر قرارمی‌دهیم. این گونه معادلات را **معادلات تعادلی** نیز می گویند.

مثال ۱۴.۴ زنجیرهٔ مارکوفی که ماتریس آهنگ گذار آن به‌شرح زیر است را درنظر بگیرید

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

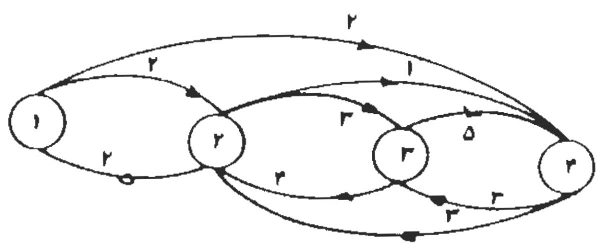
رابطه‌های حدی برای این زنجیره با استفاده ازرابطه‌های (۴۲.۴) و(۴۳.۴) به‌شرح زیر محاسبه می‌شود.

$$[\pi_1 \ \ \pi_2 \ \ \pi_3 \ \ \pi_4]Q = 0$$

یا

$$\begin{cases} -4\pi_1 + 2\pi_2 = 0 \\ 2\pi_1 - 6\pi_2 + 4\pi_3 + 3\pi_4 = 0 \\ 3\pi_2 - 9\pi_3 + 3\pi_4 = 0 \\ 2\pi_1 + \pi_2 + 5\pi_3 - 6\pi_4 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases} \qquad (۴۵.۴)$$

معادلات فوق را می‌توانیم با استفاده ازمعادلات تعادلی نیز به‌دست آوریم. برای این‌کار ابتدا نمودار آهنگ این مسئله‌را رسم می‌کنیم. چون این زنجیره‌دارای چهار حالت است، نمودار آهنگ نیز دارای چهار گره‌است که هر گره معرف یك حالت است. مقادیر مربوط به‌آهنگ گذار ازهرحالت به حالت دیگر نیز روی نمودار نشان داده شده است. معادلات تعادلی را برای هر گره (حالت)، می‌نویسیم:



حالت ۱:

مقادیر مربوط به خروج از حالت ۱ ، $\pi_1(2+2)$

مقادیر مربوط به‌ورود به‌حالت ۱ ، $۲\pi_۲$

درنتیجه با استفاده از معادلهٔ تعادلی داریم: $۲\pi_۲ = ۲\pi_۱$

حالت ۲: $$(۲+۳+۱)\pi_۲ = ۲\pi_۱ + ۴\pi_۳ + ۳\pi_۴$$

حالت ۳: $$(۴+۵)\pi_۳ = ۳\pi_۲ + ۳\pi_۴$$

حالت ۴: $$(۳+۳)\pi_۴ = ۲\pi_۱ + \pi_۲ + ۵\pi_۳$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، معادلات فوق همان معادلات (۲۵.۴) هستند، که مستقیماً از روی نمودار آهنگ و براساس معادلات تعادلی به‌دست آمده‌اند. پس ازحل معادلات فوق، احتمالات حدی به‌دست می‌آیند.

مسائل

۱. دریک‌سیستم مخابراتی، پیامها به‌شکل صفرویك ارسال می‌شوند. هر پیام باید ازمراحل مختلف بگذرد. فرض‌کنیدکه یك پیام با احتمال P بدون تغییر یك مرحله را طی می‌کند. اگر X_n معرف حالت یك پیام (صفر و یك) درمرحلهٔ nام باشد، نشان دهیدکه X_n یك زنجیرهٔ مارکوف تشکیل می‌دهد. ماتریس‌گذار را بنویسید.

۲. درهریك از دوظرف موجود، سه‌توپ وجوددارد. سه‌عدد ازتوپها سفید وسه عدد دیگر قرمزاست. هردفعه به‌طورهمزمان ازهرظرف یك‌توپ به‌طور تصادفی برمی‌داریم ودرظرف دیگر قرارمی‌دهیم. اگر X_n معرف تعداد توپهای سفید ظرف اول پس از n دفعه برداشتن باشد، نشان دهیدکه X_n یك زنجیرهٔ مارکوف تشکیل‌می‌دهد. ماتریس گذارآن را بنویسید.

۳. سکه‌ای‌که احتمال‌آمدن شیر درآن P است، را پرتاب می‌کنیم. $X_n = k$ معرف‌این است‌که تاکنون k نوبت متوالی (و ازجمله در پرتاب nام) شیرآمده است. X_n را به‌صورت یك زنجیرهٔ مارکوف نشان دهید وماتریس‌گذار آن را بنویسید.

۴. درظرفی پنج‌توپ سفید و چهارتوپ قرمز وجود دارد. هردفعه یك توپ را به‌طور تصادفی ازظرف برمی‌داریم وسپس آن توپ را به‌اضافهٔ دو توپ همرنگ‌آن را مجدداً به ظرف برمی‌گردانیم. فرض‌کنید X_n معرف رنگ توپی باشدکه دردفعهٔ nام ازظرف برداشته‌ایم. (این مدل به‌مدل Polya معروف است).

الف. تابع توزیع X_n را به دست آورید. برای این منظور، با استفاده از روش

استقرا[1] نشان دهیدکه احتمال انتخاب یك توپ سفید همیشه برابر ۵/۹ است.

ب. آیا X_n یك زنجیرهٔ مارکوف همگن را تشکیل می‌دهد؟

ج. Y_n را تعداد توپهای سفید موجود در ظرف قبل از n امین برداشت در نظر بگیرید. آیا Y_n زنجیرهٔ مارکوف است؟ در صورتی که جواب مثبت است، ماتریس گذار را بنویسید.

۵. انباری را درنظر بگیریدکه کالایی را عرضه می‌کند. تقاضا برای این‌کالا درطول هفته می‌تواند با احتمال یکسان، صفر، ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشد. در انتهای هر هفته سفارش کالا انجام می‌شود وبلافاصله تأمین می‌گردد، اما انبار مجبور است‌که کالا را فقط دربسته‌های سه‌تایی بخرد. اگر درطول هفته مشتری مراجعه‌کرد وکالا موجود نبود، سفارش اوهمچنان محفوظ می‌ماند وپس ازتأمین کالا به‌او تحویل داده می‌شود. لذا، سطح موجودی منفی به‌معنای سفارش تأمین نشده است. ضابطهٔ سفارش به‌این‌ترتیب است‌که چنانچه موجودی درانتهای هفته بمیزانی کمتر از ۲ (۱ یاکمتر) برسد، حداقل سفارش ممکن داده می‌شود، تا میزان موجودی به ۲ یا بیشتر برسد (با درنظرگرفتن اینکه فقط سفارش با ضرایب ۳ امکانپذیراست). نشان‌دهیدکه‌میزان موجودی درانتهای هفته، قبل وهمچنین بعد ازسفارش، به‌صورت زنجیرهٔ مارکوف است.

ماتریس گذار این دو زنجیرهٔ مارکوف را بنویسید.

۶. درمسئلهٔ یك، با روش‌استقرا نشان دهیدکه،

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}(۲P-۱)^n & \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}(۲P-۱)^n \\ \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}(۲P-۱)^n & \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}(۲P-۱)^n \end{bmatrix}$$

۷. مسئلهٔ یك را مجدداً بافرض ۹ر۰ = P درنظربگیرید. احتمال اینکه یك‌پیام صفر پس‌از گذشتن‌از ۵ مرحله بازهم به‌شکل صفر باشد، چقدراست؟ اگرپیامی‌پس‌از گذشتن‌از۵ مرحله به‌شکل صفرباشد، احتمال اینکه در شروع مراحل هم به‌شکل صفر بوده‌باشد، چقدراست، مشروط براینکه تعداد پیامهای صفر در مرحلهٔ شروع، ۲ برابر پیامهای یك بوده‌باشد؟

۸. فرایند X_n را درنظر بگیریدکه فقط مقادیر صفر ویك و دو را انتخاب می‌کند. فرض کنیدکه عبارت زیر، بسته به‌اینکه n فرد یا زوج باشد، برابر با P_{ij} یا P'_{ij} است.

$$P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i,\ X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_0=i_0\}$$

---

۱. برای این‌منظور، ابتدا ثابت‌کنیدکه رابطهٔ فوق به‌ازای ۱ = n صدق می‌کند. آن‌گاه، نشان دهیدکه اگر رابطهٔ به‌ازای n صادق باشد به‌ازای $(n+1)$ نیزصادق است.

P_{ij} و P'_{ij} را از ماتریسهای زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{P}' = \begin{vmatrix} 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.3 & 0 \end{vmatrix}$$

آیا X_n یك زنجیرهٔ ماركوف همگن تشكیل می‌دهد؟ اكنون حالت سیستم را به صورت $Y_n = (a, b)$ نشان می‌دهیم، كه a مقادیر صفر و یك و دو را می‌گیرد(یعنی همان حالتهای قبلی) و b نشان‌دهندهٔ زوج یا فرد بودن مقدار n است. این فرایند را در چارچوب یك زنجیرهٔ ماركوف نشان دهید.

۹. سه زنجیرهٔ ماركوف، كه ماتریسهای گذار آنها به‌شرح زیر است را در نظر بگیرید.

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

كدام حالتها برگشت‌پذیرند؟ دورهٔ برگشت را برای هرحالت محاسبه كنید.

۱۰. زنجیرهٔ ماركوفی با سه‌حالت ۱ و ۲ و ۳ و با ماتریس گذار زیرمفروض است. اگر در ابتدا سیستم درحالت ۱ باشد، احتمال اینكه پس از دومرحله مجدداً درحالت ۱ قرار گیرد، چقدراست؟ آیا می‌توان پیش‌بینی كرد كه بعد از تعداد مراحل بسیارزیاد، به‌چه احتمالی درحالت ۱ خواهد بود؟

$$\begin{vmatrix} 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \end{vmatrix}$$

۱۱. یك زنجیرهٔ ماركوف 8×8 را در نظر بگیرید. فرض كنید $j \to i$، نشان‌دهید كه حداكثر در ۸ مرحله می‌توان از i به j رسید.

۱۲. در مسئلهٔ یك، آیا احتمال حدی وجود دارد؟ جوابهای به‌دست آمده را با جواب مسئلهٔ شش مقایسه كنید.

۱۳. پنج نفر روی یك دایره ایستاده‌اند و مشغول توپ‌بازی هستند. هركسی توپ را دراختیار داشته باشد، به‌طور شانسی برای دیگران پرتاب می‌كند. احتمال اینكه كسی كه توپ در اختیارش است، پس از دوپرتاب مجدداً توپ را دراختیار داشته باشد، چقدر است؟ پس ازپنج پرتاب، و در درازمدت، احتمال اینكه توپ دراختیار این شخص قرار گیرد، چقدراست؟

۱۴. ماتریس گذار یك زنجیرهٔ ماركوف را در نظر بگیرید، كه مجموع عناصر هرستون آن برابر با یك باشد. اگر این ماتریس تحویل‌ناپذیر و نادوره‌ای، و دارای M حالت باشد، نشان دهید كه در درازمدت احتمالهای ... خواهد بود

$$\pi_j = \frac{1}{M}, \quad j = 1, 2, \ldots, M$$

۱۵. فرض كنید كه X_n معرف مجموع پرتابهای n طاس باشد. با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۱۴ رابطهٔ زیر را محاسبه كنید.

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n \text{ مضربی ازعدد نه بودن})$$

راهنمایی: فرض كنید كه Y_n معرف مابه‌التفاوت X_n با بزرگترین مضرب ۷ كه از X_n كوچكتر است باشد، ماتریس گذار Y_n را بنویسید و نشان دهید كه مجموع عناصر ستونهای آن برابر با یك است. آن‌گاه از نتیجه مسئلهٔ ۱۴ استفاده كنید.

۱۶. در هردست مسابقه بین دوتیم الف و ب، تیم الف با‌احتمال ۰٫۴ برنده می‌شود. تیمی برنده است كه سه‌دست را ببرد و پس از آن بازی متوقف می‌شود.
الف. این مسئله را به‌صورت یك زنجیرهٔ ماركوف نشان دهید.
ب. بااستفاده ازرابطه‌های زنجیره‌ای ماركوف، این احتمال را كه بازی درسه‌دست تمام شود، حساب كنید.
ج. بااستفاده ازروابط زنجیره‌های ماركوف، این احتمال را كه تیم الف برنده شود، حساب كنید.

۱۷. دریك سیستم موجودی، فرض می‌شود كه میزان تقاضا درهر هفته متغیری تصادفی با توزیع پواسون ومیانگین ۲ است. چنانچه میزان موجودی درانتهای هفته صفر یا یك باشد، مقدار سفارش به‌اندازه‌ای خواهدبود كه سطح موجودی به ۲ برسد. اما اگر موجودی در

پایان هفته دو یا بیشتر باشد، سفارشی داده نمی‌شود. فرض می‌کنیم که کالای سفارش شده بلافاصله به‌انبار می‌رسد و چنانچه تقاضایی درطول هفته به‌علت نداشتن موجودی تأمین نشود، آن تقاضا از دست رفته تلقی می‌شود. این مسئله را به شکل یك زنجیرهٔ مارکوف فورموله کنید وماتریس گذار آن را بنویسید. تابع توزیع مقدارموجودی کالا را دردراز‌مدت به‌دست آورید.

۱۸. زنجیرهٔ مارکوف پیوسته‌ای باسه‌حالت (۰ و ۱ و ۲) وماتریس آهنگ گذار زیرمفروض است

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.5 & 0.1 \\ 1.2 & -1.2 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & -0.8 \end{bmatrix}$$

الف. نمودار آهنگ آن را رسم کنید

ب. احتمال اینکه دردرازمدت سیستم درحالت صفر باشد، چقدراست؟

۱۹. زنجیرهٔ مارکوف پیوستهٔ مسئلهٔ ۱۸ را به زنجیرهٔ مارکوف گسسته تبدیل کنید.

۲۰. بااستفاده ازروابط حدی درزنجیرهٔ مارکوف پیوسته، احتمالات حدی مدل مسئلهٔ ۱۸ را محاسبه کنید ونتایج حاصله را با نتایج به‌دست آمده ازنمودار آهنگ مقایسه کنید.

۲۱. نشان دهید که ماتریس زیرمعرف ماتریس گذار یك زنجیرهٔ مارکوف پیوسته است. آن گاه ماتریس آهنگ گذار را به‌دست آورید.

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 0.6 + 0.4e^{-5t} & 0.4 - 0.4e^{-5t} \\ 0.6 - 0.6e^{-5t} & 0.4 + 0.6e^{-5t} \end{bmatrix}$$

۲۲. نمودار آهنگ مسئلهٔ ۲۱ را رسم کنید وسپس احتمال‌بودن سیستم را درهریك از دو حالت (دردرازمدت) حساب کنید. این نتایج را مستقیماً ازروی ماتریس $\mathbf{P}(t)$ نیز به‌دست آورید.

۲۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل پیشرو و پسرو $(C\text{-}K)$ مربوط به مسئلهٔ ۱۸ را بنویسید.

۲۴. با استفاده ازمعادلات پیشرو(یا پسرو) $C\text{-}K$، تابع توزیع $P_n(t)$ درفرایند پواسون را به‌دست آورید.

۲۵. ثابت کنید که در درازمدت $(n \to \infty)$، رابطهٔ زیرصدق می‌کند.

$$P(X_n = j \mid X_{n+1} = i) = p_{ji}\frac{\pi_j}{\pi_i}$$

۲۶. درمثال ۶.۲، باروش استقرا نشان دهید که به‌ازای تمام مقادیر n، مقدار هرکدام از احتمالات زیر حداقل برابر با ۰٫۳ است. آن گاه ثابت کنید که حالتهای ۱ و ۲ برگشت‌پذیر هستند.

$$(p_{22}^{(n)}, p_{21}^{(n)}, p_{12}^{(n)}, p_{11}^{(n)})$$

۲۷. با فرض دانستن ماتریس آهنگ گذار، با استفاده ازرابطهٔ پیشرو یا پسرو $(C\text{-}K)$، ماتریس گذار مسئلهٔ ۲۱ را به‌دست آورید

راهنمایی: ازرابطه‌های $\frac{dp_{11}(t)}{dt} - \frac{dp_{21}(t)}{dt}$ وهمچنین $4\frac{dp_{0}(t)}{dt} + 2\frac{dp_{21}(t)}{dt}$ استفاده کنید.

$$\frac{3\,dp_{11}(t)}{dt}$$